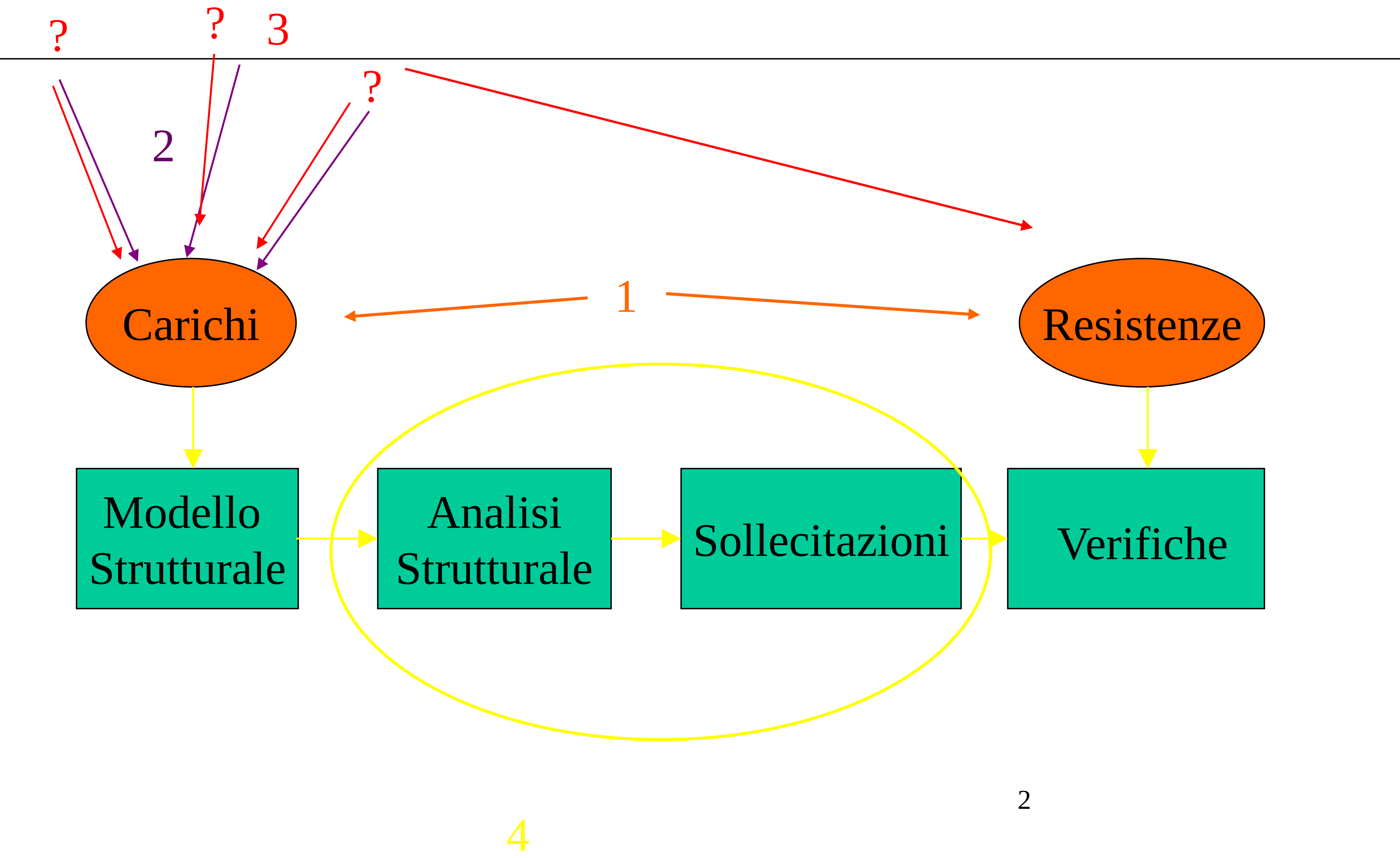
Il Caso fondamentale della resistenza in ambito probabilistico

Tomaso Trombetti

Il processo progettuale



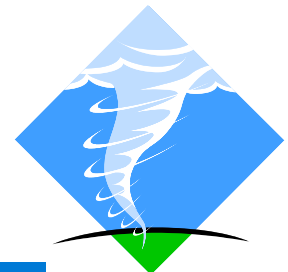
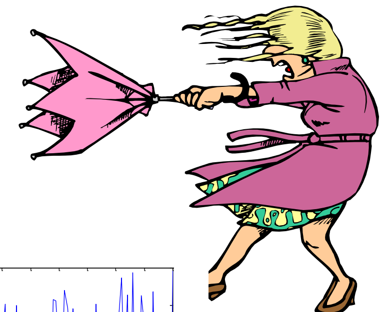
Affidabilità delle strutture: note storiche

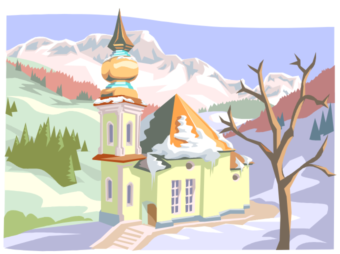
- Il tema dell'affidabilità o sicurezza strutturale e’ stato trascurato sino agli anni ‘60
- La vera sfida dell’ingegneria strutturale sino agli anni ‘60 e’ stata la cosi’ detta *stress analysis*, la conoscenza sperimentale di fenomeni complessi, lo studio della stablita’ ecc.
- Non ancora operanti o ancora intrattabili molte questioni di base nel campo della meccanica aleatoria
- E’ corrente l’affermazione che: *l’ingegneria strutturale in genere e’ stata sino agli anni ‘60 ingenuamente deterministica*

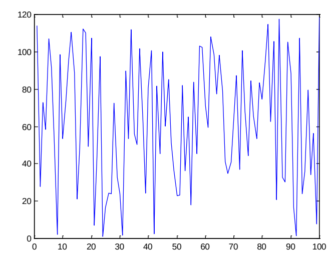
Affidabilità delle strutture

- I carichi sono associati a processi stocastici

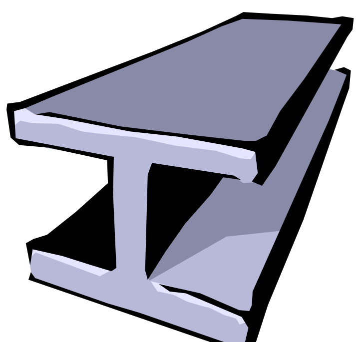






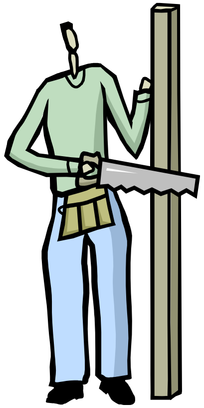
- Le resistenze in gioco sono variabili aleatorie (random)


Affidabilità delle strutture

- I modelli strutturali non sono immuni da incertezze

- La costruzioni e' afflitta da errori random



Affidabilità

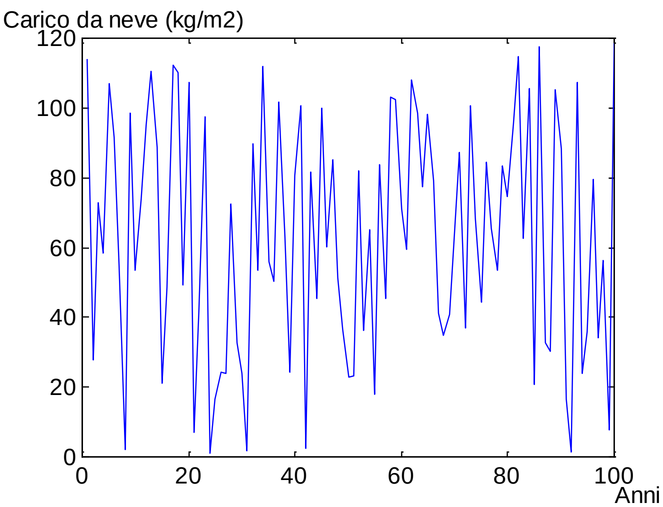
- **La progettazione strutturale comporta la definizione della probabilità di collasso di una struttura**

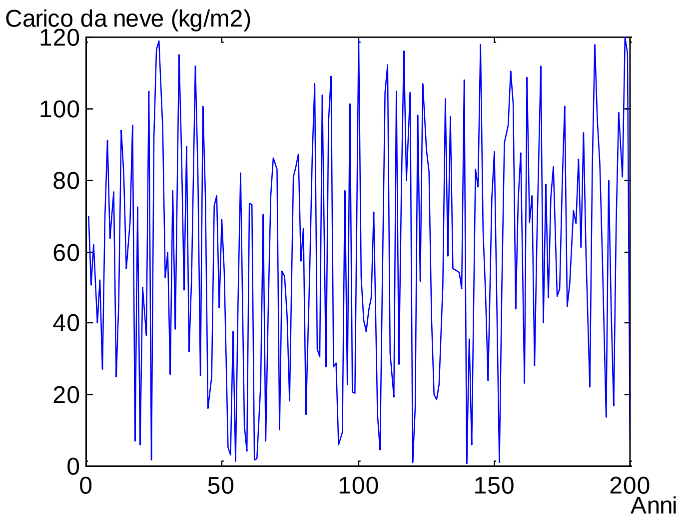
- Raramente nell'ingegneria civile le probabilità possono essere misurate su una popolazione di strutture, perché spesso le strutture sono uniche o non confrontabili tra loro, anche se apparentemente simili

- E' pero' possibile in qualche modo avere una stima o misura (a partire dalle probabilità relative ai carichi ed alle resistenze) della cosi' detta affidabilità teorica che non tiene conto degli errori umani

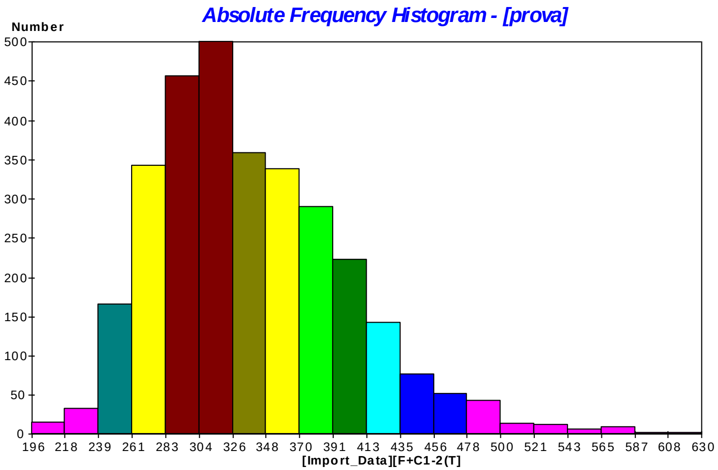
Distribuzione probabilistica dei carichi e delle resistenze del materiale

- Carichi

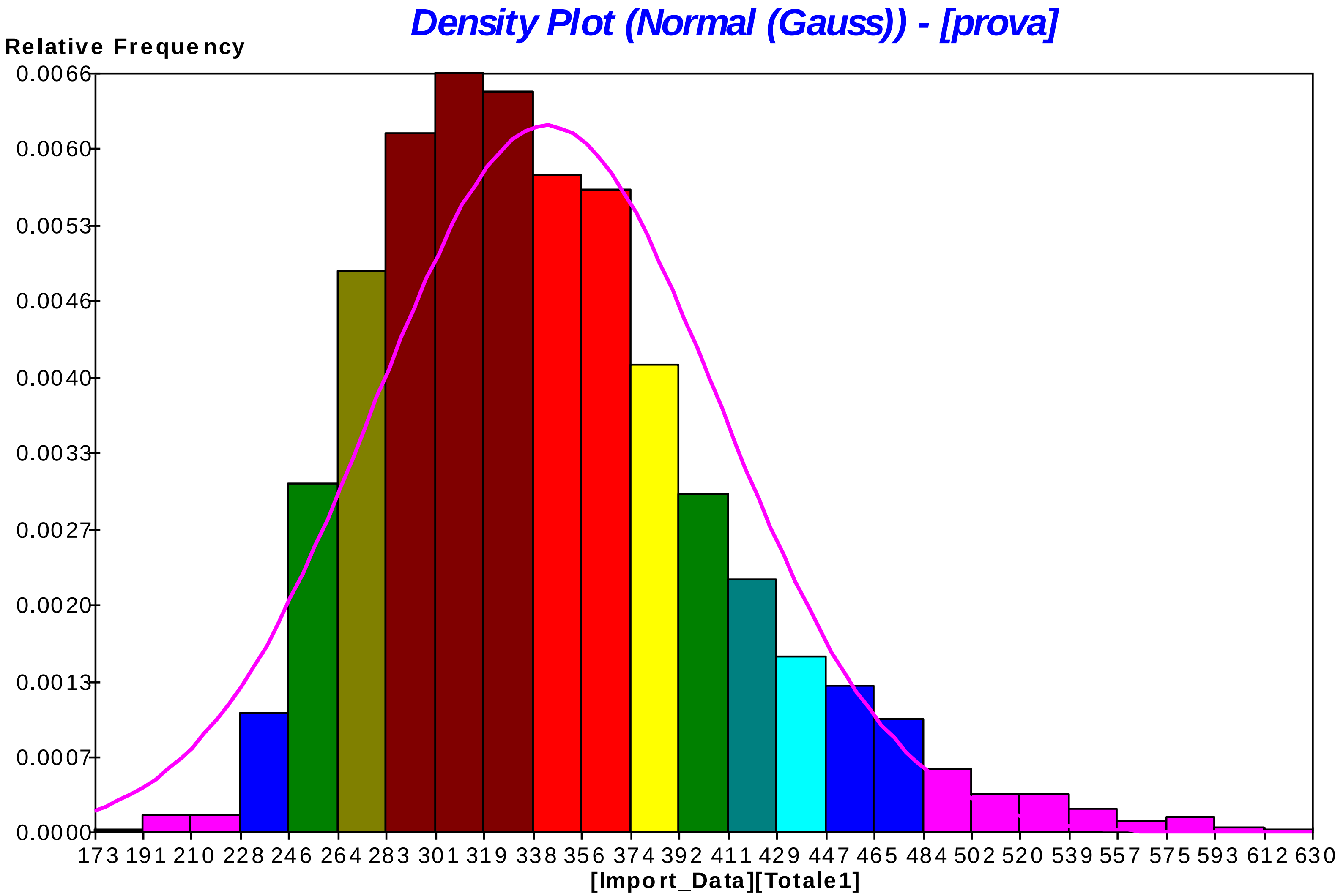




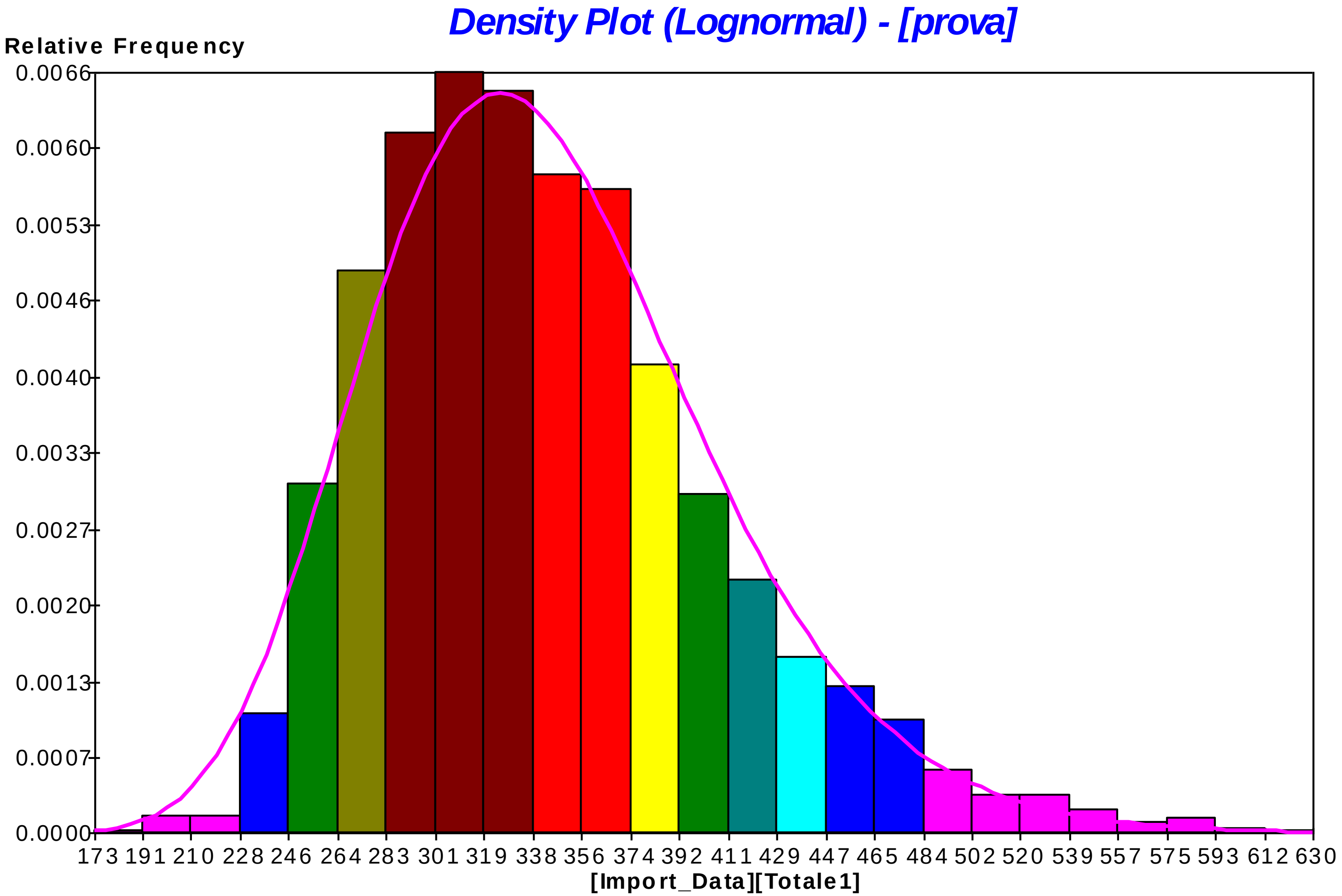
- Resistenze



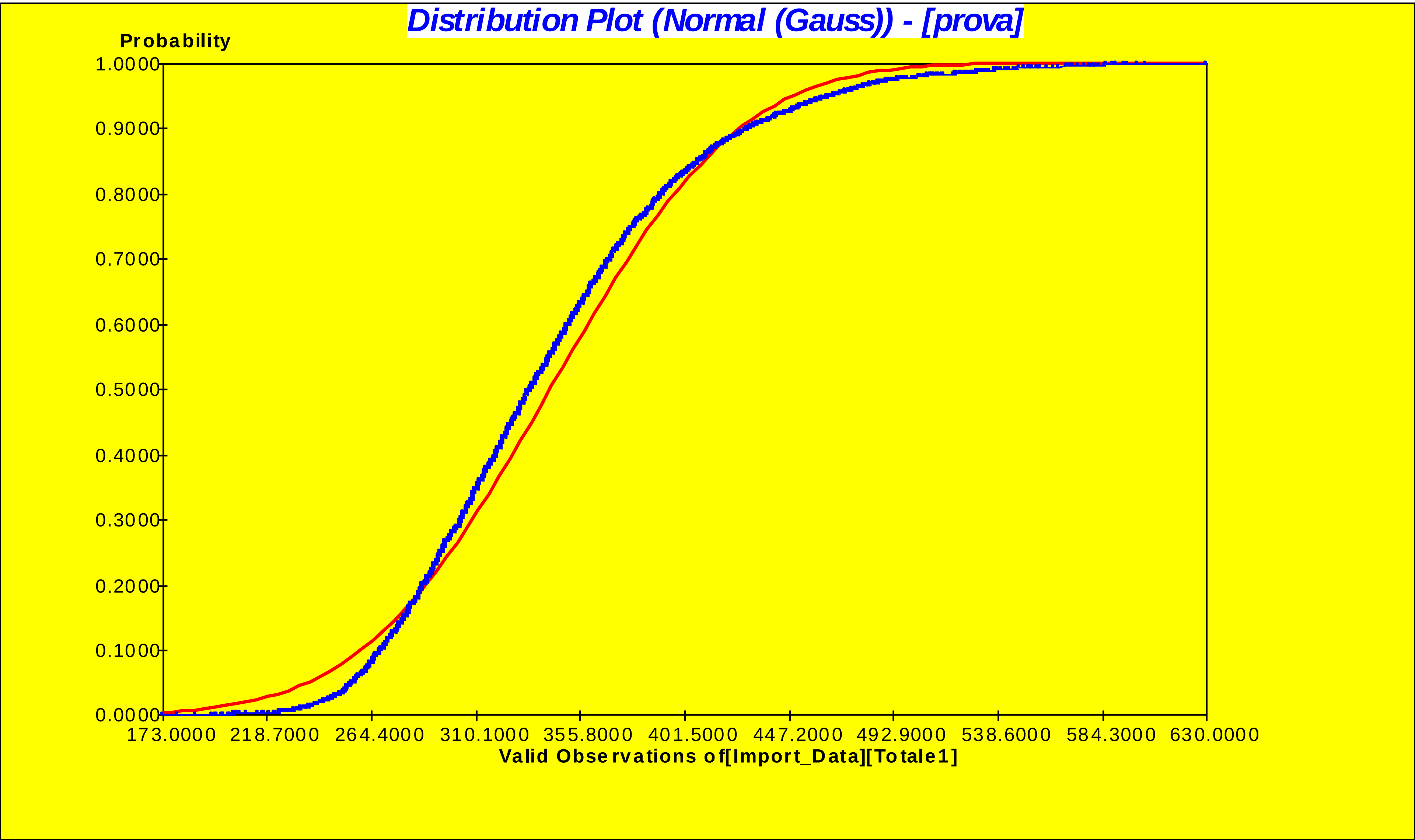
Esempi di risultati sperimentali su calcestruzzi



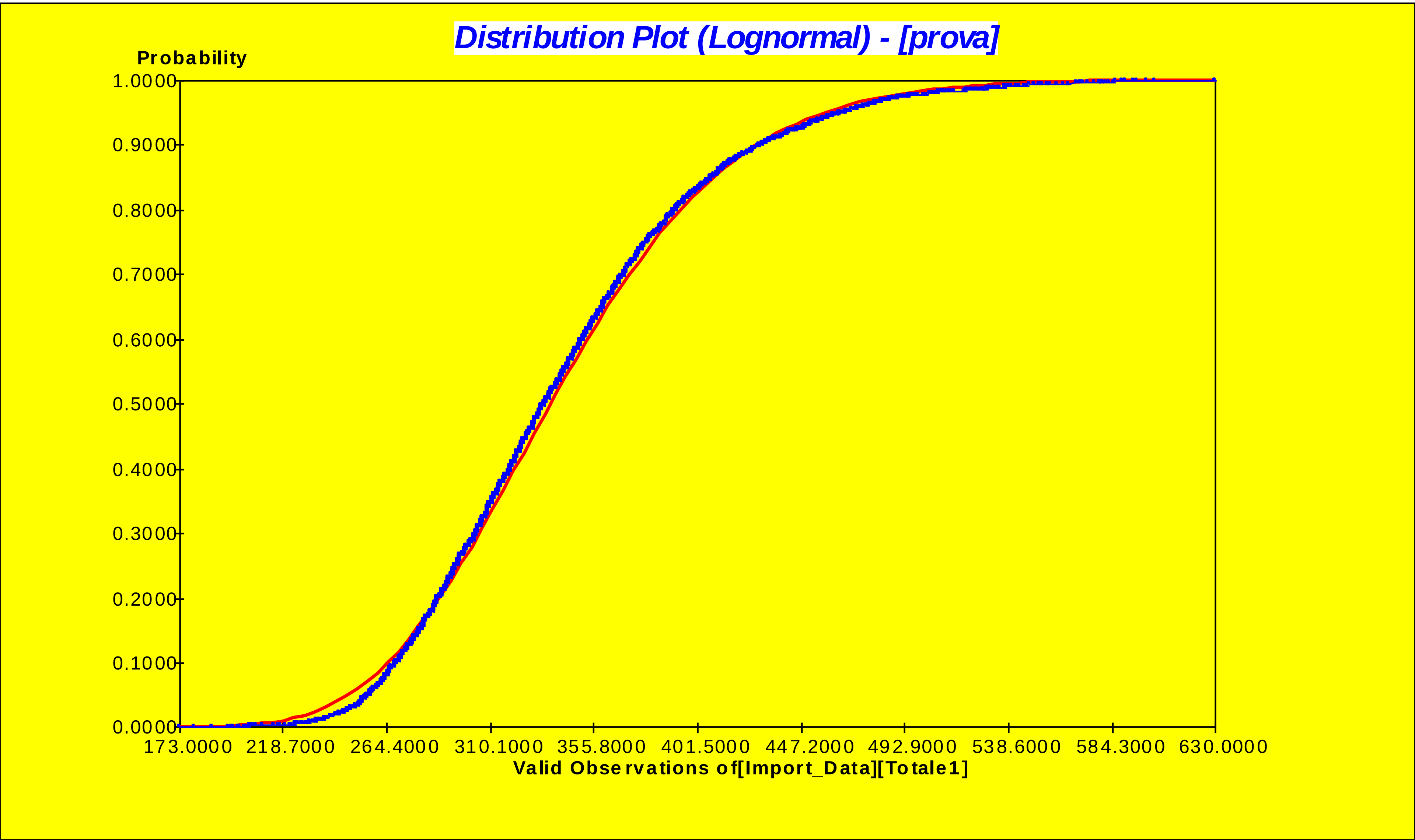
Esempi di risultati sperimentali su calcestruzzi



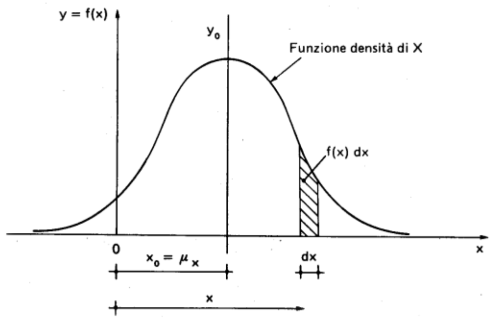
Esempi di risultati sperimentali su calcestruzzi



Esempi di risultati sperimentali su calcestruzzi



Proprieta' della funzione densita' di probabilita' PDF



- Media o valore atteso $$\mu_x = \frac{1}{N} \cdot \sum_{1=1}^{N} x_i$$

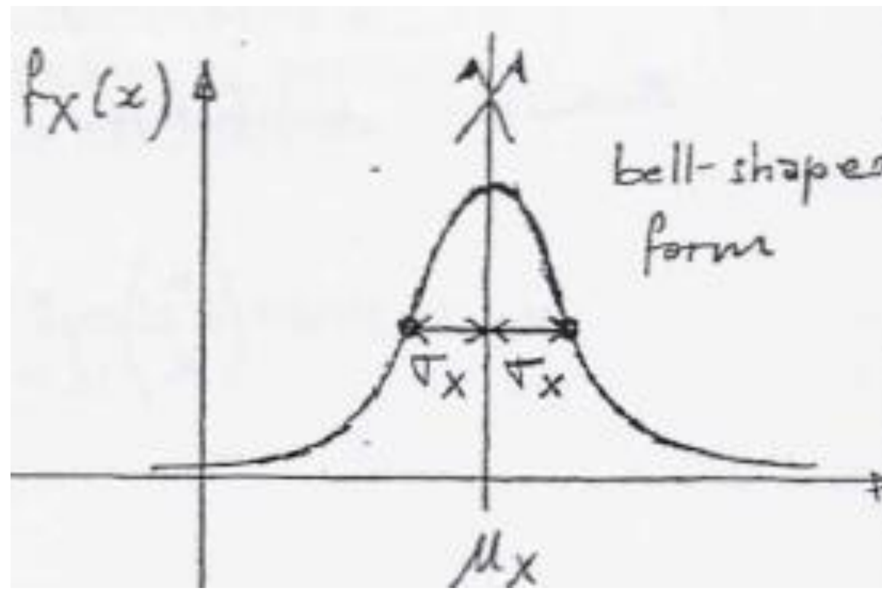
- Varianza $$VAR[X] = (\sigma_x)^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{1=1}^{N} (x_i - \mu_x)^2$$

- Deviazione standard $$\sigma_x = \sqrt{Var[X]}$$

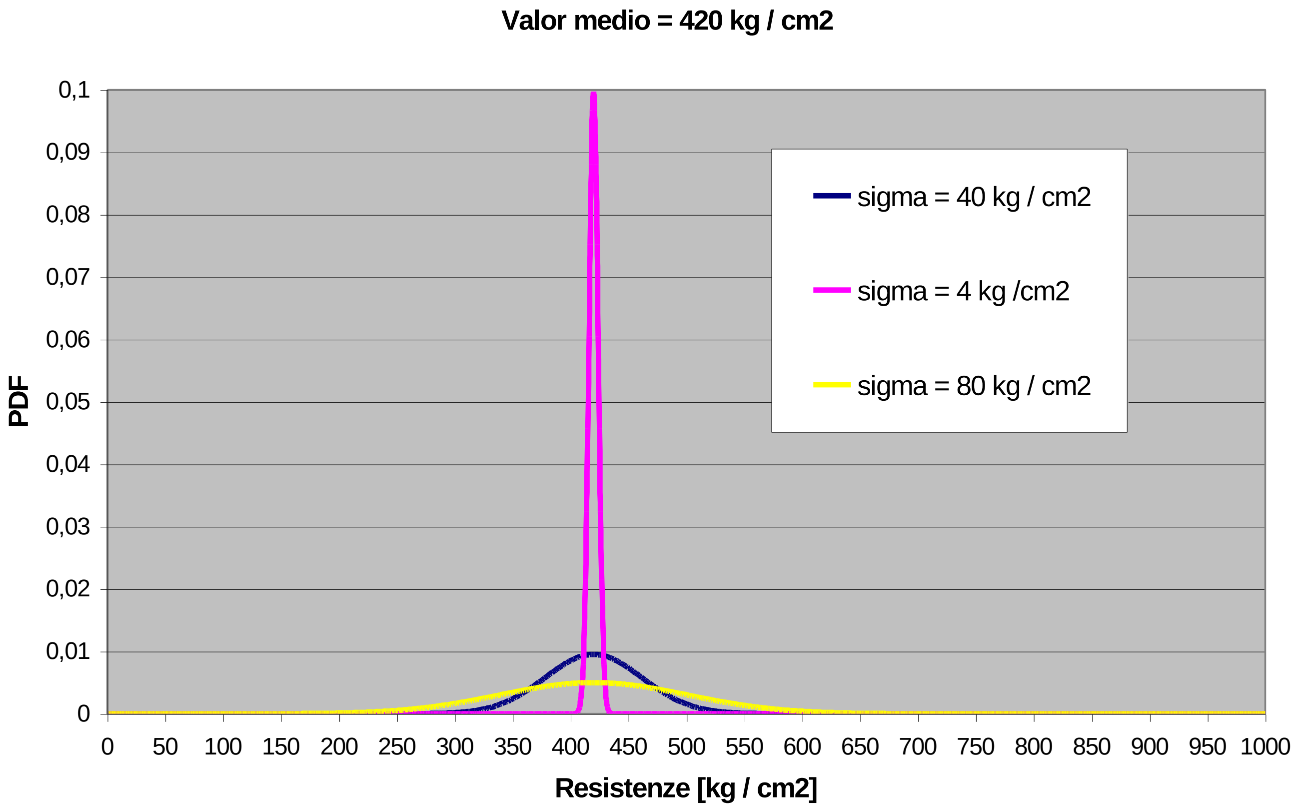
- Coefficiente di variazione $$\delta_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X}$$

Main properties $N(\mu, \sigma)$

- It is a symmetric distribution between -∞ to +∞
- It is defined by two parameters μ, σ wich are coincident with the mean and the standard deviation
- The CDF of N has no closed form

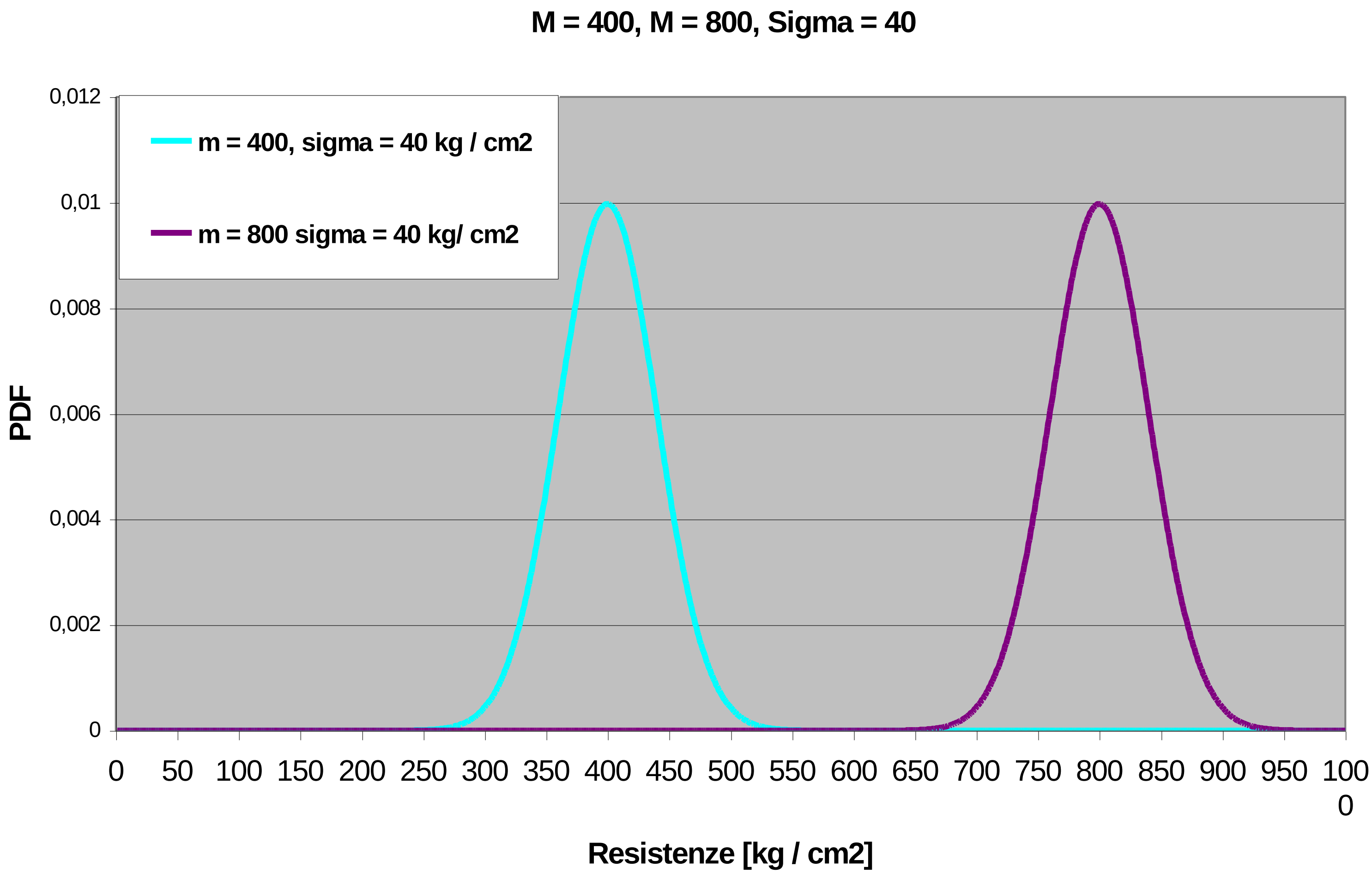


Proprieta' della funzione densita' di probabilita' PDF

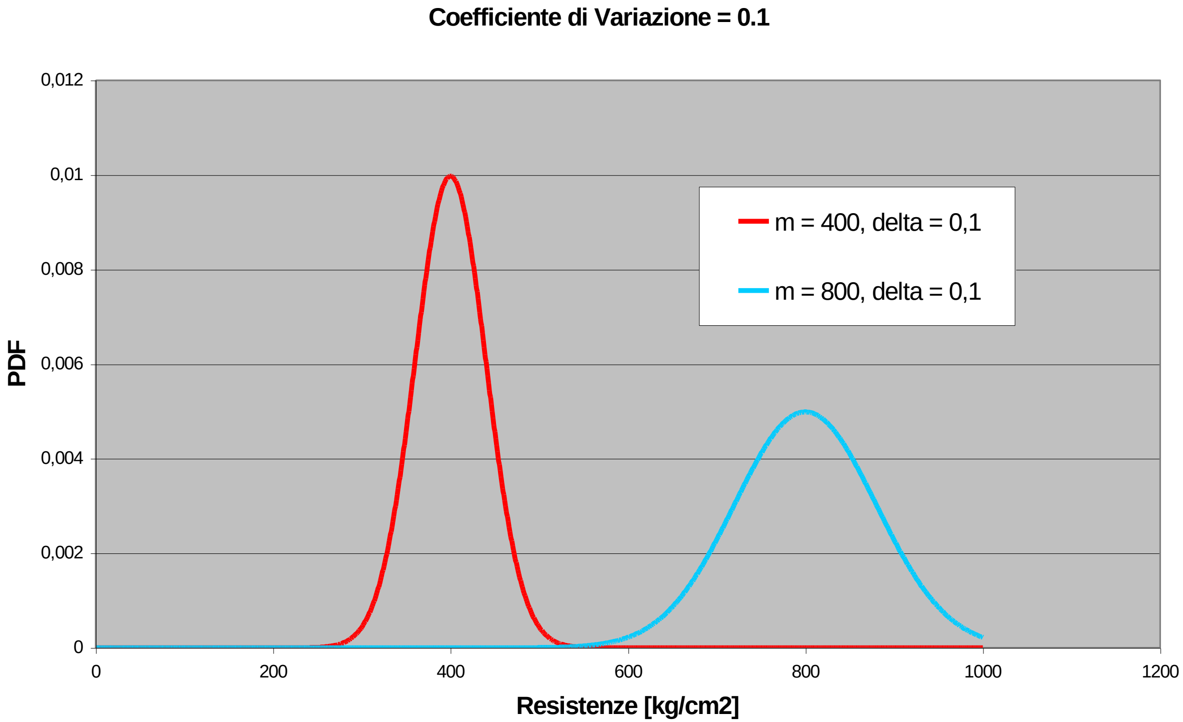


- Deviazione standard $$\sigma_x = \sqrt{Var[X]}$$

Proprieta' della funzione densita' di probabilita' PDF - Standard Deviation



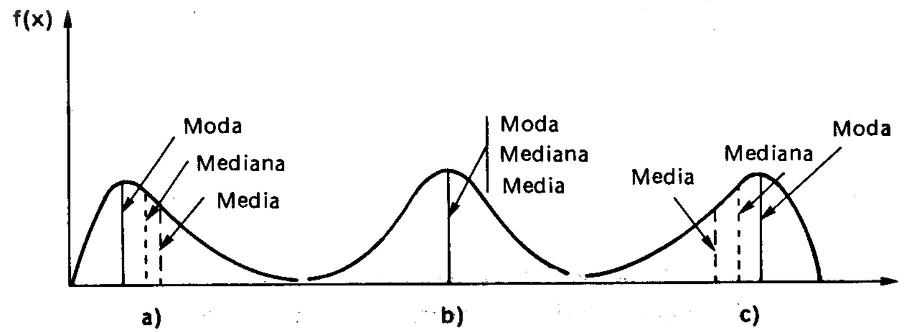
Proprieta' della funzione densita' di probabilita' PDF - Coefficiente di variazione



- Coefficiente di variazione

$$\delta_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X}$$

Valore atteso, moda, mediana



- media = valore atteso = $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x) \cdot dx = \mu_X$
- moda: valore della variabile aleatoria (x) per cui si ha il massimo della PDF
- mediana: valore della variabile aleatoria (x) per cui $F_X[x] = 0.5$

Distribuzione Normale Standard N(0,1)

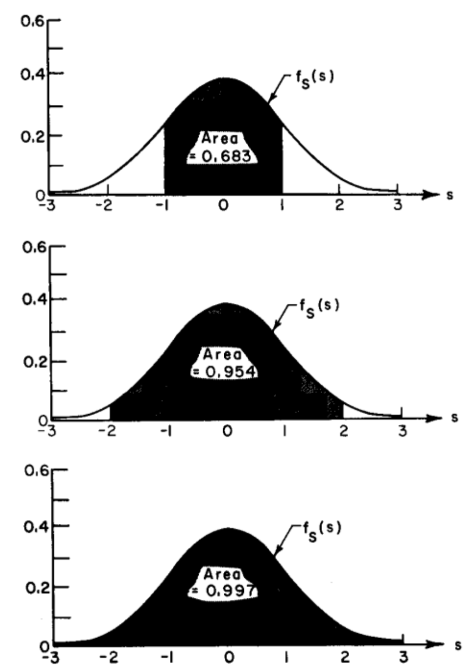
- PDF = $$f_S(\bar{s}) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{\bar{s}^2}{2}}$$

- CDF = $$F_S(\bar{s}) = \int_{-\infty}^{\bar{s}} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{\bar{s}^2}{2}} ds = \Phi(\bar{s})$$

$$P[-\sigma < X < \sigma] = 0.683$$

$$P[-2\cdot\sigma < X < 2\cdot\sigma] = 0.954$$

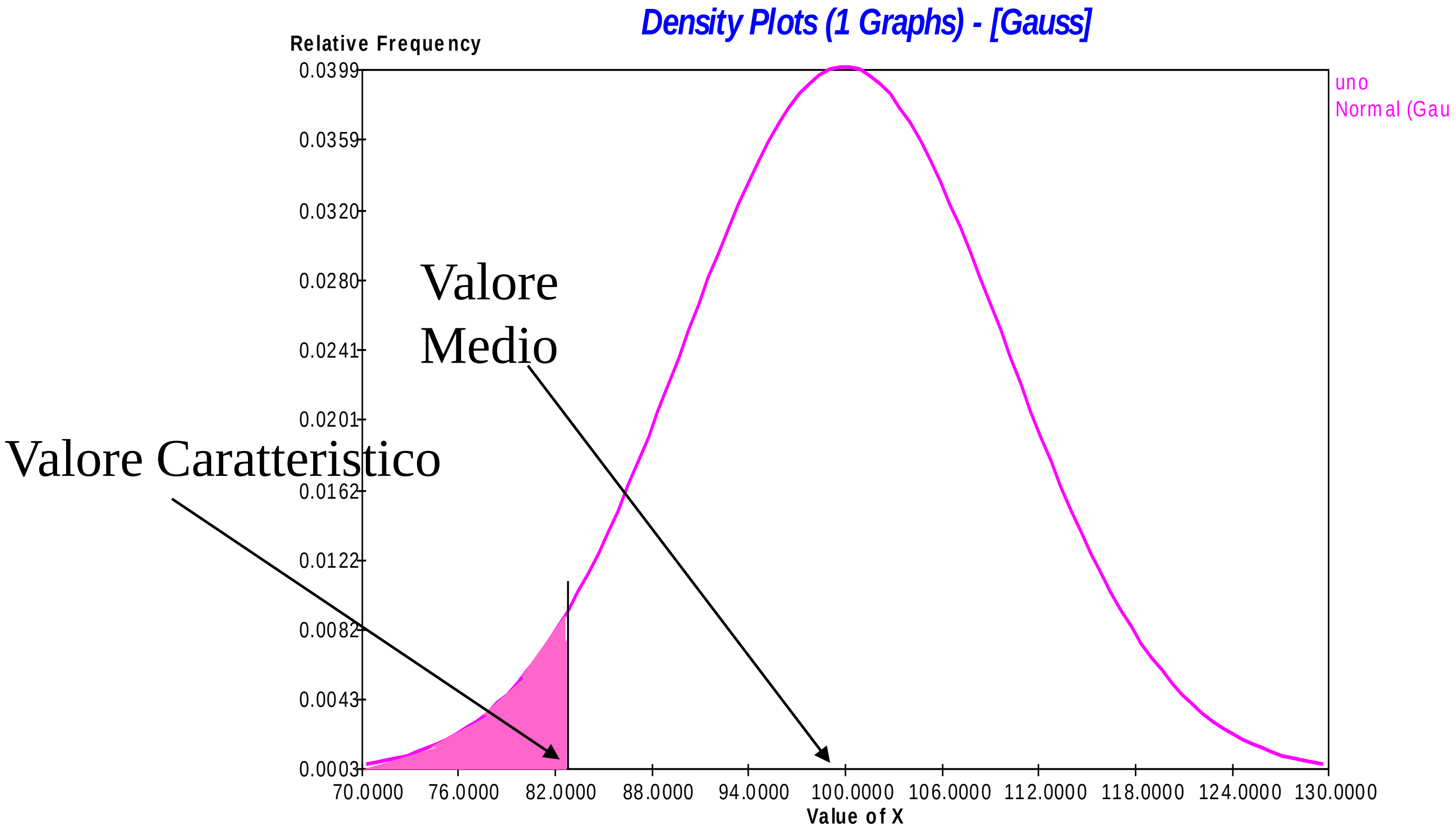
$$P[-3\cdot\sigma < X < 3\cdot\sigma] = 0.997$$



Density functions of the standard normal distribution

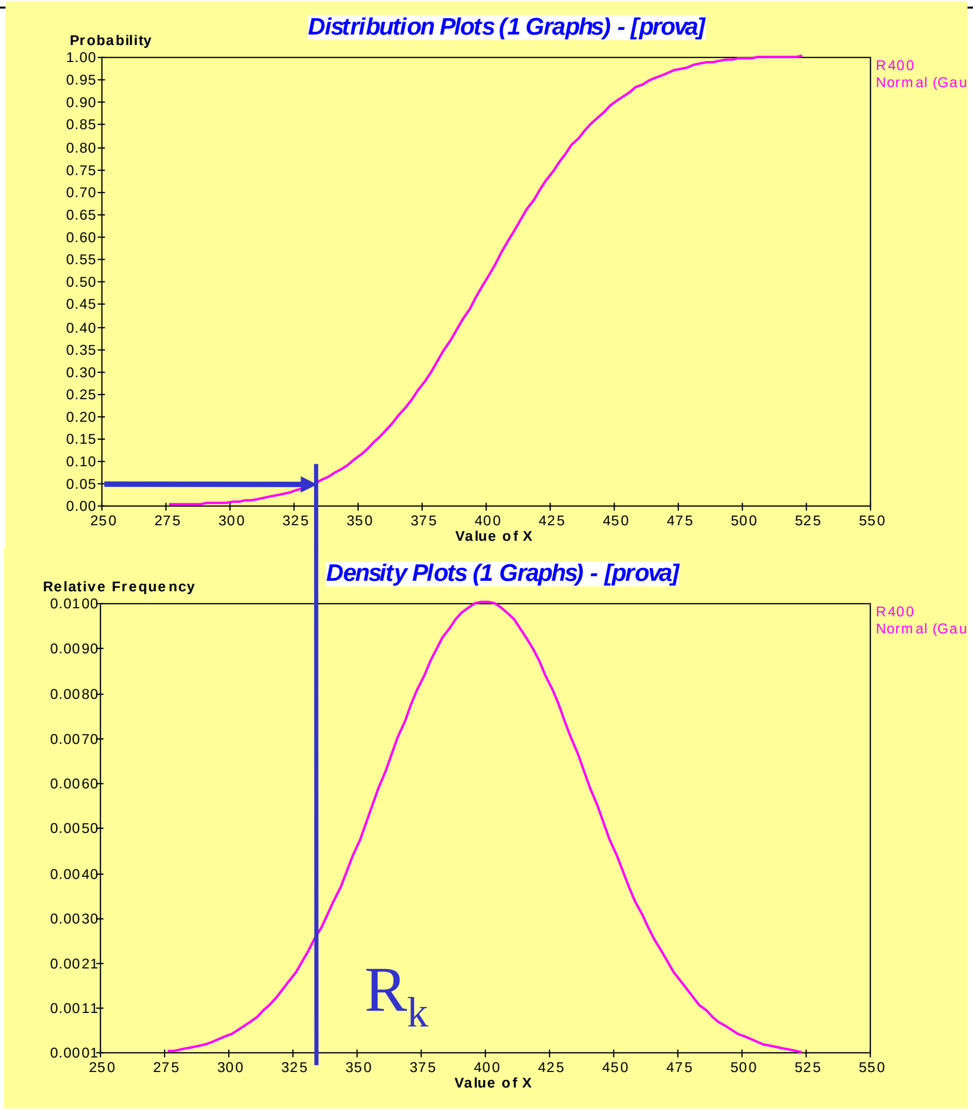
I valori caratteristici delle resistenze

- Nel secondo caso (PDF) è il valore della variabile a cui corrisponde una area sottesa dalla curva a sinistra del valore pari a 0.05 ed una area sottesa dalla curva a destra del valore pari a 0.95.



La resistenza caratteristica a compressione è definita come la resistenza per la quale si ha il 5% di probabilità di trovare valori inferiori. Nelle presenti norme la resistenza caratteristica designa quella dedotta da prove su provini come sopra descritti, confezionati e stagionati come specificato al § 11.2.4, eseguite a 28 giorni di maturazione. Potranno essere indicati altri tempi di maturazione a cui riferire le misure di resistenza ed il corrispondente valore caratteristico. Inoltre, si dovrà tener conto degli effetti prodotti da eventuali processi accelerati di maturazione.

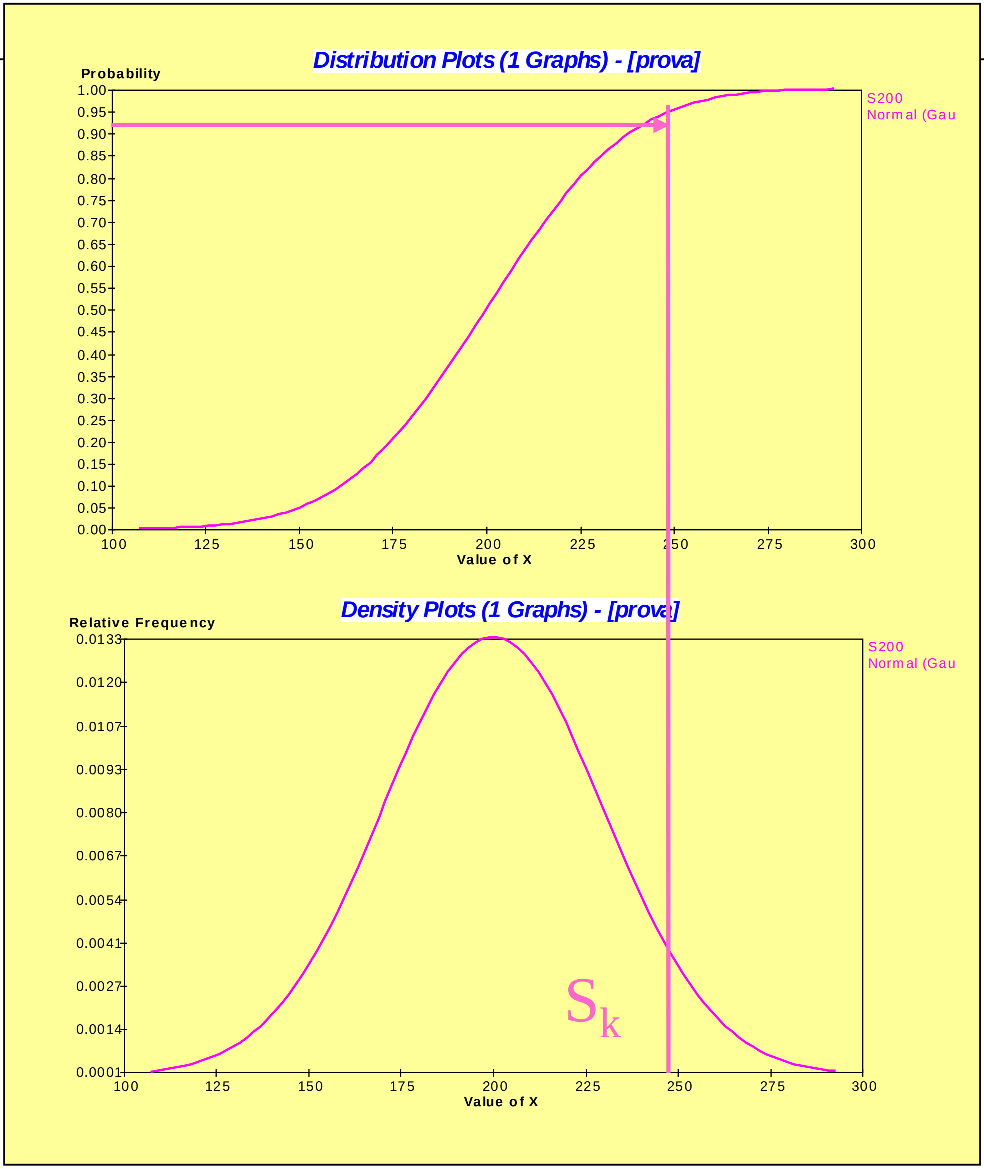
- **For the strength R_k is the 5 % percentile**



Se si eseguono controlli statistici accurati, l'interpretazione dei risultati sperimentali può essere svolta con i metodi completi dell'analisi statistica assumendo la legge di distribuzione più corretta e il suo valor medio, unitamente al coefficiente di variazione (rapporto tra deviazione standard e valore medio). Non sono accettabili calcestruzzi con coefficiente di variazione superiore a 0,3. Per calcestruzzi con coefficiente di variazione (s/R_m) superiore a 0,15 occorrono controlli più accurati, integrati con prove complementari di cui al §11.2.7.

According to code we need to start from the characteristic values

- **For the loads S_k is the 95 % percentile**



Capitolo 2.3 NTC 2018

$R_d = E_d$ [2.2.1]

Il valore di progetto della resistenza di un dato materiale X_d è, a sua volta, funzione del valore caratteristico della resistenza, definito come frattile 5 % della distribuzione statistica della grandezza, attraverso l'espressione: $X_d = X_k/\gamma_M$, essendo γ_M il fattore parziale associato alla resistenza del materiale.

Il valore di progetto di ciascuna delle azioni agenti sulla struttura F_d è ottenuto dal suo valore caratteristico F_k, inteso come frattile 95% della distribuzione statistica o come valore caratterizzato da un assegnato periodo di ritorno, attraverso l'espressione: $F_d = \gamma_F F_k$ essendo γ_F il fattore parziale relativo alle azioni. Nel caso di concomitanza di più azioni variabili di origine diversa si definisce un valore di combinazione $\psi_0 F_k$, ove $\psi_0 \leq 1$ è un opportuno coefficiente di combinazione, che tiene conto della ridotta probabilità che più azioni di diversa origine si realizzino simultaneamente con il loro valore caratteristico.

Per grandezze caratterizzate da distribuzioni con coefficienti di variazione minori di 0,10, oppure per grandezze che non riguardino univocamente resistenze o azioni, si possono considerare i valori nominali, coincidenti con i valori medi.

Capitolo 2 – Sicurezza e prestazioni attese

2.5.2. CARATTERIZZAZIONE DELLE AZIONI ELEMENTARI

Il valore di progetto di ciascuna delle azioni agenti sulla struttura F_d è ottenuto dal suo valore caratteristico F_k, come indicato nel §2.3.

In accordo con le definizioni del §2.3, il valore caratteristico G_k di azioni permanenti caratterizzate da distribuzioni con coefficienti di variazione minori di 0,10 si può assumere coincidente con il valore medio.

Nel caso di azioni variabili caratterizzate da distribuzioni dei valori estremi dipendenti dal tempo, si assume come valore caratteristico quello caratterizzato da un assegnato periodo di ritorno. Per le azioni ambientali (neve, vento, temperatura) il periodo di ritorno è posto uguale a 50 anni, corrispondente ad una probabilità di eccedenza del 2% su base annua; per le azioni da traffico sui ponti stradali il periodo di ritorno è convenzionalmente assunto pari a 1000 anni. Nella definizione delle combinazioni delle azioni, i termini Q_{kj} rappresentano le azioni variabili di diversa natura che possono agire contemporaneamente: Q_{k1} rappresenta l'azione variabile di base e Q_{k2}, Q_{k3}, … le azioni variabili d'accompagnamento, che possono agire contemporaneamente a quella di base.

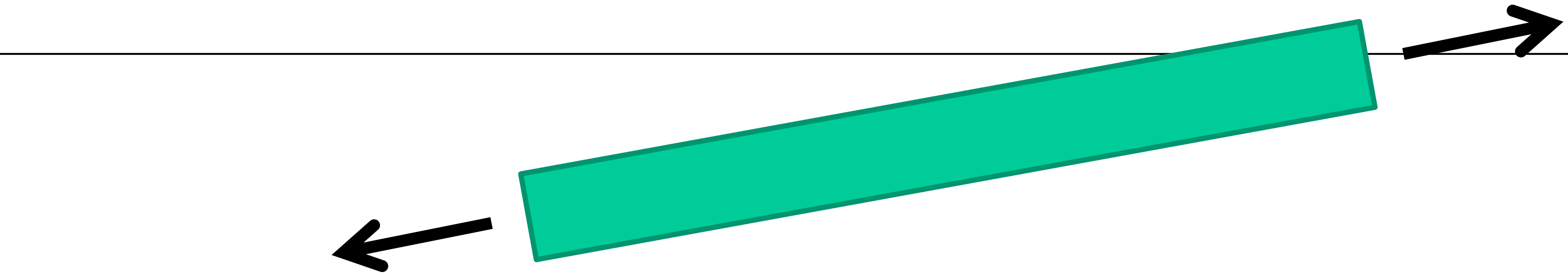
Con riferimento alla durata relativa ai livelli di intensità di un'azione variabile, si definiscono:

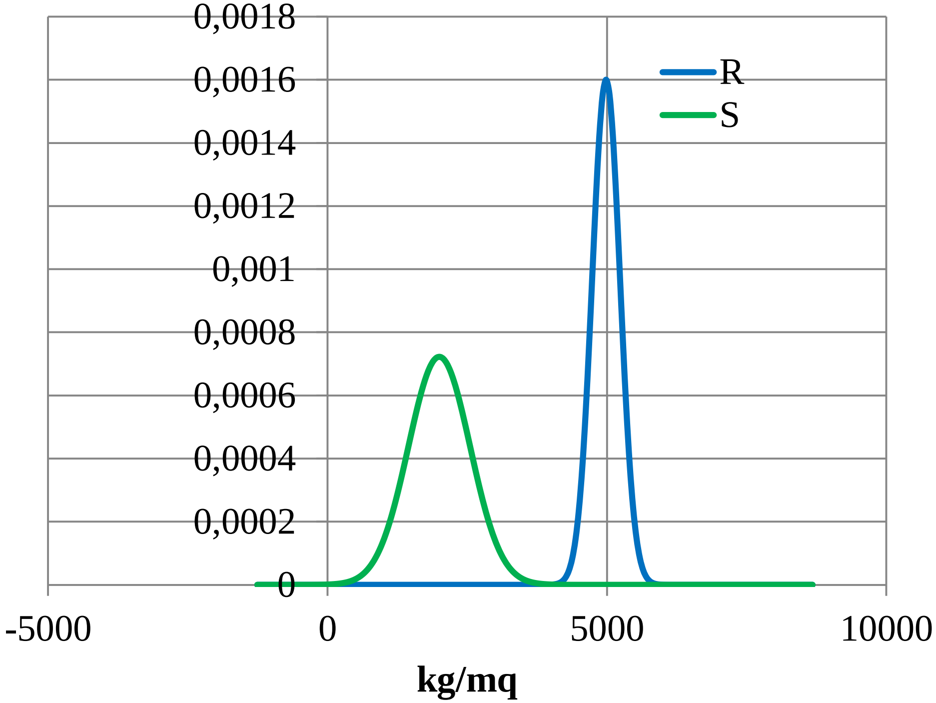
- valore quasi permanente $\psi_{2j} \cdot Q_{kj}$: il valore istantaneo superato oltre il 50% del tempo nel periodo di riferimento. Indicativamente, esso può assumersi uguale alla media della distribuzione temporale dell'intensità;
- valore frequente $\psi_{1j} \cdot Q_{kj}$: il valore superato per un periodo totale di tempo che rappresenti una piccola frazione del periodo di riferimento. Indicativamente, esso può assumersi uguale al frattile 95% della distribuzione temporale dell'intensità;
- valore di combinazione $\psi_{0j} \cdot Q_{kj}$: il valore tale che la probabilità di superamento degli effetti causati dalla concomitanza con altre azioni sia circa la stessa di quella associata al valore caratteristico di una singola azione.

Nel caso in cui la caratterizzazione probabilistica dell'azione considerata non sia disponibile, ad essa può essere attribuito il valore nominale. Nel seguito sono indicati con pedice k i valori caratteristici; senza pedice k i valori nominali.

La Tab. 2.5.I riporta i coefficienti di combinazione da adottarsi per gli edifici civili e industriali di tipo corrente.

The fundamental case: R-S





Pf=P[R<S]

Given that the strength is defined according to code provisions:

$Rd=Rk / \gamma_m$

$Sd=Sk \ \ \gamma_s$

Imposing Rd=Sd

D = R - S

- If "R" and "S" are normally distributed it follows that D = R-S has a normal distribution with parameters:

$$\mu_D = \mu_R - \mu_S$$
$$\sigma_D = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$$

- The probability of collapse P_f

$$P[D < 0] = \phi\left(0 - \frac{\mu_D}{\sigma_D}\right) = \phi(-\beta)$$

$$\beta = \frac{\mu_D}{\sigma_D}$$

Reliability index

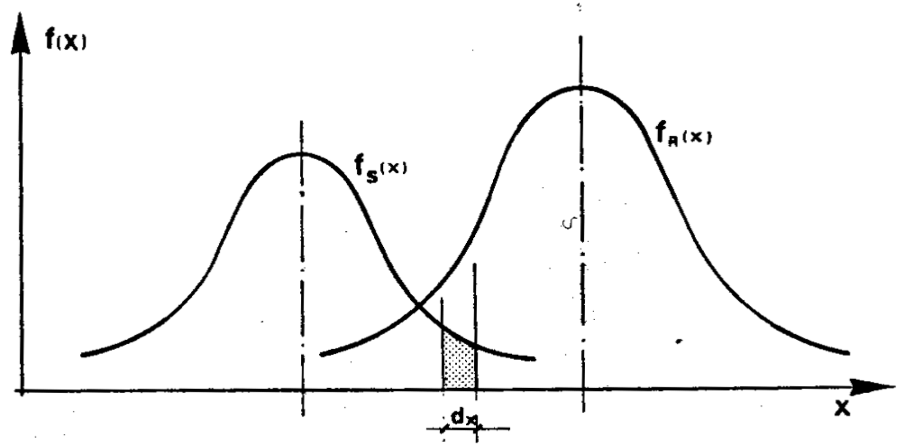
- $\beta = \mu_D/\sigma$ is the so called reliability index : when β is large, the safety is large)

- The probability of collapse is

$$P_f = P[D < 0] = \phi\left(-\frac{\mu_D}{\sigma_D}\right)$$

- The reliability is

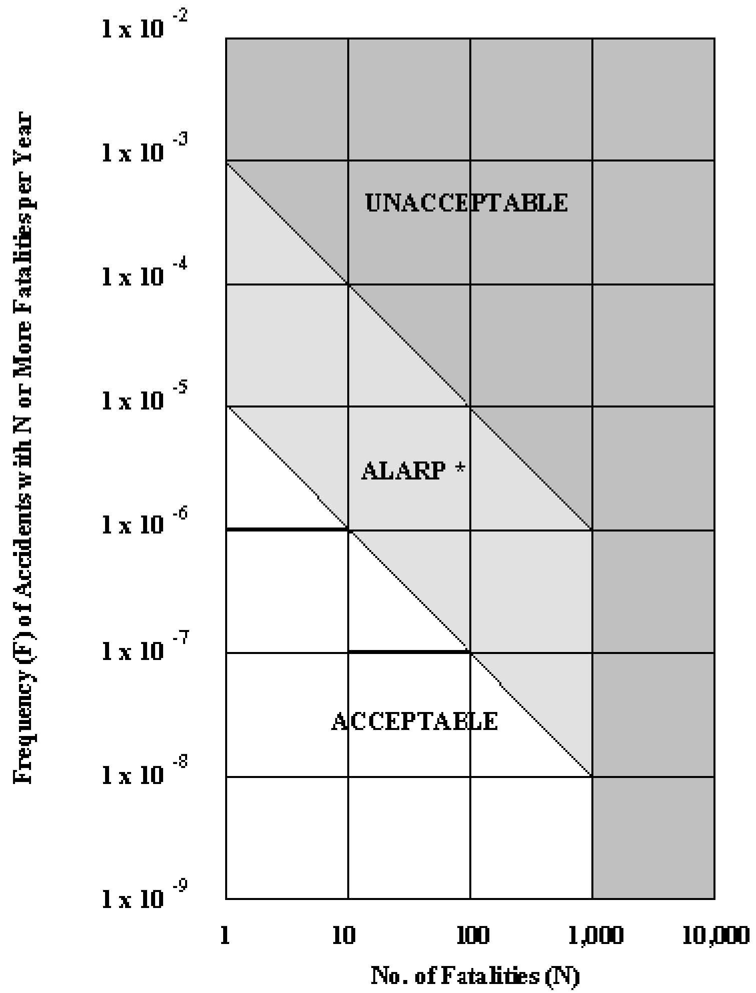
$$1 - P_f = \Phi(\beta)$$



Curve di densità di probabilità delle sollecitazioni e delle resistenze.

P_f & β

	Slightly harmful	Harmful	Extremely harmful
Highly unlikely	TRIVIAL RISK	TOLERABLE RISK	MODERATE RISK
Unlikely	TOLERABLE RISK	MODERATE RISK	SUBSTANTIAL RISK
Likely	MODERATE RISK	SUBSTANTIAL RISK	INTOLERABLE RISK

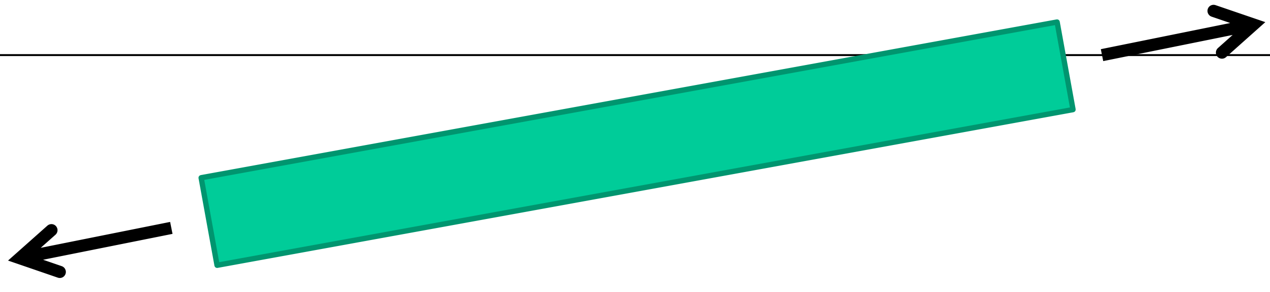


* ALARP means As Low As Reasonably Practicable. Risk within ALARP Region Should Be Mitigated To As Low As Reasonably Practicable

P_f & β

Pf	β	
0.10	1,28	
0.01	2,33	STATI LIMITE DI ESERCIZIO
1,00E-03	3,10	
1,00E-04	3,72	
1,00E-05	4,25	STATI LIMITE ULTIMI
1,00E-06	4,75	

The fundamental case: R-S



Data:

γ_m material strength partial coefficient

γ_s load partial coefficient

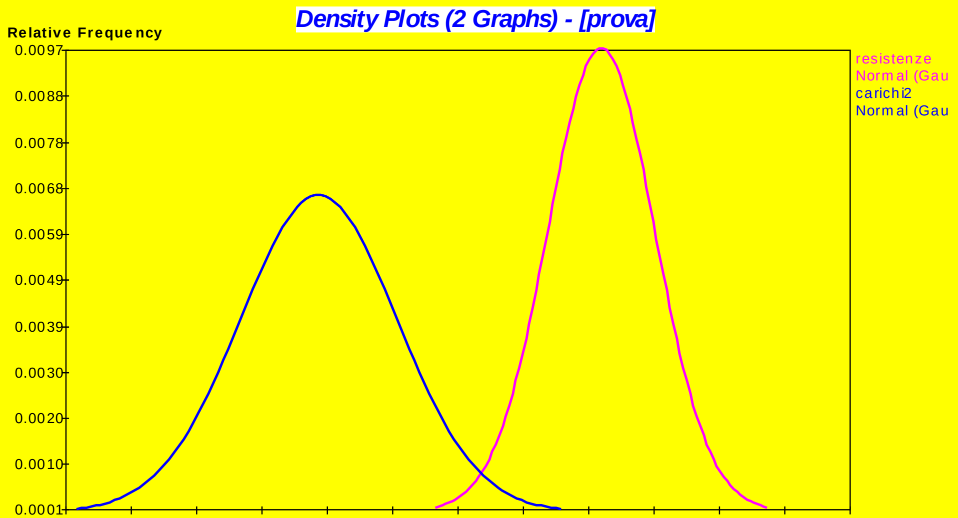
δ_m material strength COV

δ_s load COV

$$P[\mathrm{D}<0]=\phi\left(-\frac{\mu_D}{\sigma_D}\right)=\phi\left(-\frac{\gamma_m\gamma_s\alpha-1}{\sqrt{\left(\gamma_m\gamma_s\alpha\delta_R\right)^2+\delta_s^{\ 2}}}\right)$$

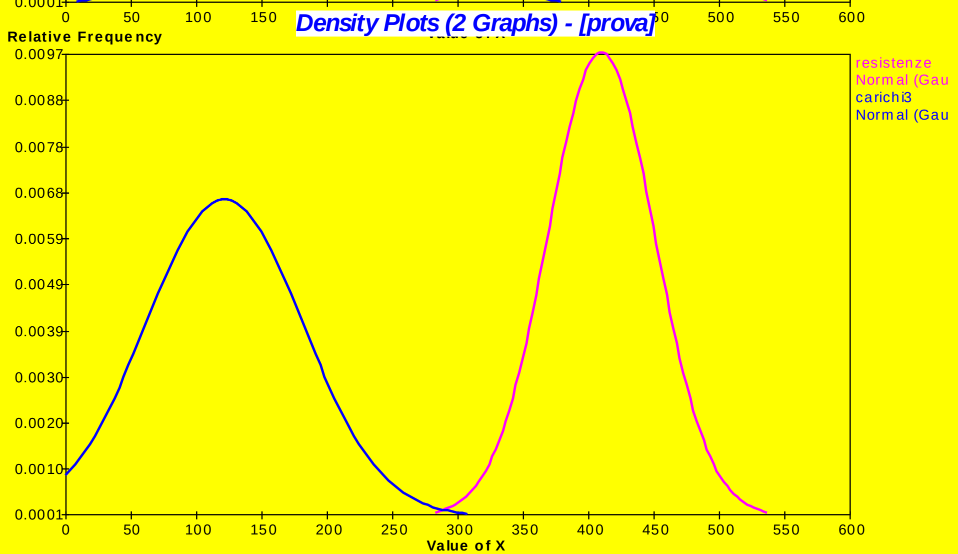
Probability of collapse

$$\beta = 3.0$$



$$\mu_R = 410$$
$$\sigma_R = 40$$
$$\mu_s = 194$$
$$\sigma_S = 60$$

$$\beta = 4.0$$



$$\mu_R = 410$$
$$\sigma_R = 40$$
$$\mu_s = 122$$
$$\sigma_S = 60$$

Playing with β

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \Rightarrow \mu_S = \mu_R - \beta \cdot \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \mu_R &= 410 \\ \sigma_R &= 40 \\ \sigma_S &= 60 \end{aligned} \Rightarrow \mu_S = 410 - \beta \cdot 56$$

$$\beta = 3 \Rightarrow \mu_s = 194$$

$$\beta = 4 \Rightarrow \mu_s = 122$$

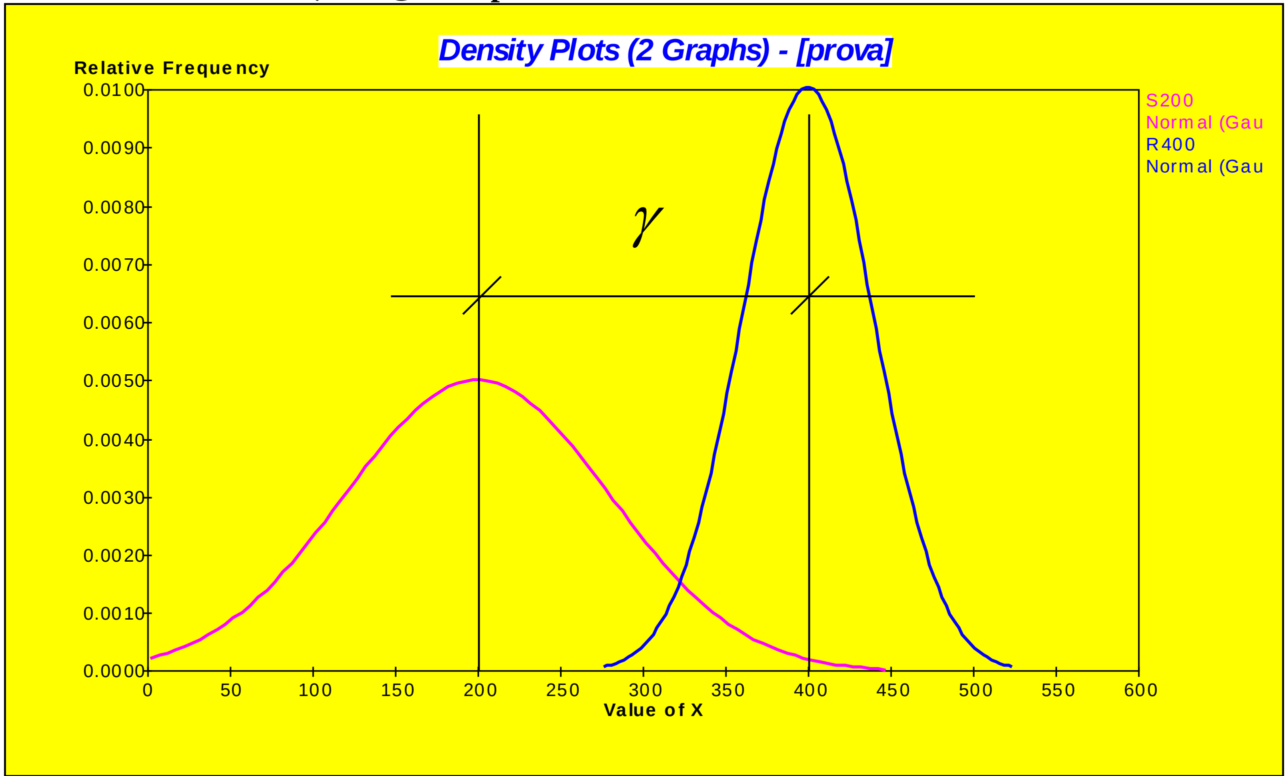
Example 1

- $\mathbf{P_f = 10^{-6}}$ **is given**

$$R \rightarrow \sigma_R = 0.1 \cdot \mu_R \rightarrow \delta_r = \frac{\sigma_R}{\mu_R} = 0.1 \qquad S \rightarrow \sigma_S = 0.4 \cdot \mu_S \rightarrow \delta_s = \frac{\sigma_S}{\mu_S}$$

- if: $$\mu_R = \gamma \cdot \mu_S \qquad \mu_D = \mu_R - \mu_S = \mu_S(\gamma - 1)$$

- What is the value of γ to get $\mathbf{P_f}$?



Example 1

- We need to solve the EQ: $P_f = P[D < 0] = \phi\left(-\frac{\mu_D}{\sigma_D}\right) = \phi(-\beta) \cong 10^{-6}$

- From the table of Φ

$$\beta \cong 4.75$$

- thus:

$$\beta = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\delta_R^2 \cdot \gamma^2 + \delta_s^2}} = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{0.01 \cdot \gamma^2 + 0.16}} = 4.75$$

- Solving for γ

$$\gamma = 3.5$$

- The safety depends of course on γ but also on the dispersion:

$$\sigma_D = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$$

Partial coefficients

- Design loads at ULS

$$F_d = \sum_{j\geq 1} \gamma_{Gj} \cdot G_{kj} + \gamma_P \cdot P_k + \gamma_{Q1} \cdot Q_{k1} + \sum_{i\geq 2} \gamma_{Qi} \cdot \Psi_{0i} \cdot Q_{ki}$$

– γ = partial coefficients (> 1 se sfavorevole, < 1 se favorevole)

$$\gamma_G = 1.4 \rightarrow 1{,}0 \qquad \gamma_P = 0.9 \rightarrow 1.2 \qquad \gamma_Q = 1.5 \rightarrow 0$$

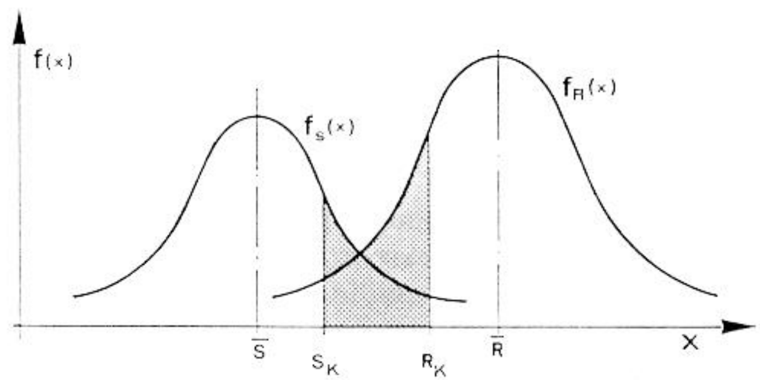
– Ψ = combination coeffiecients (< 1)

$$\Psi_0 = 0.7$$

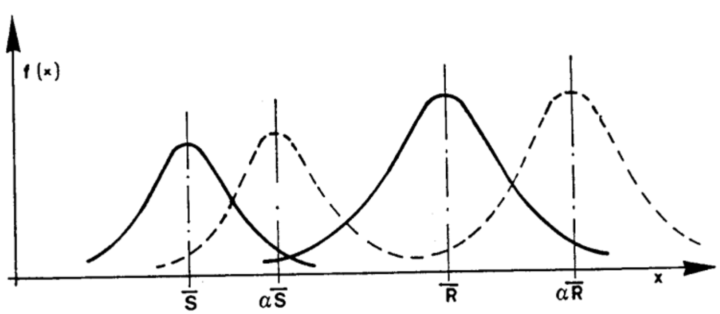
Meaning of "β"

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}$$

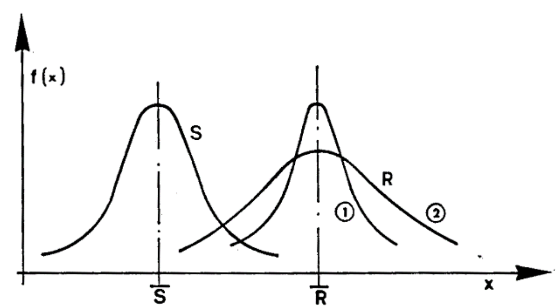
$$R_K = R_m - K\,\delta$$



Valori caratteristici e probabilità di collasso.



Influenza del fattore di amplificazione delle resistenze e delle sollecitazioni sulla probabilità di collasso di una struttura.



Effetto della variazione della curva di distribuzione delle resistenze sulla probabilità di collasso.

P_f & β as a function of "γ_{mean}" between R and S

- Let's define $\mu_R = \gamma\, \mu_S$

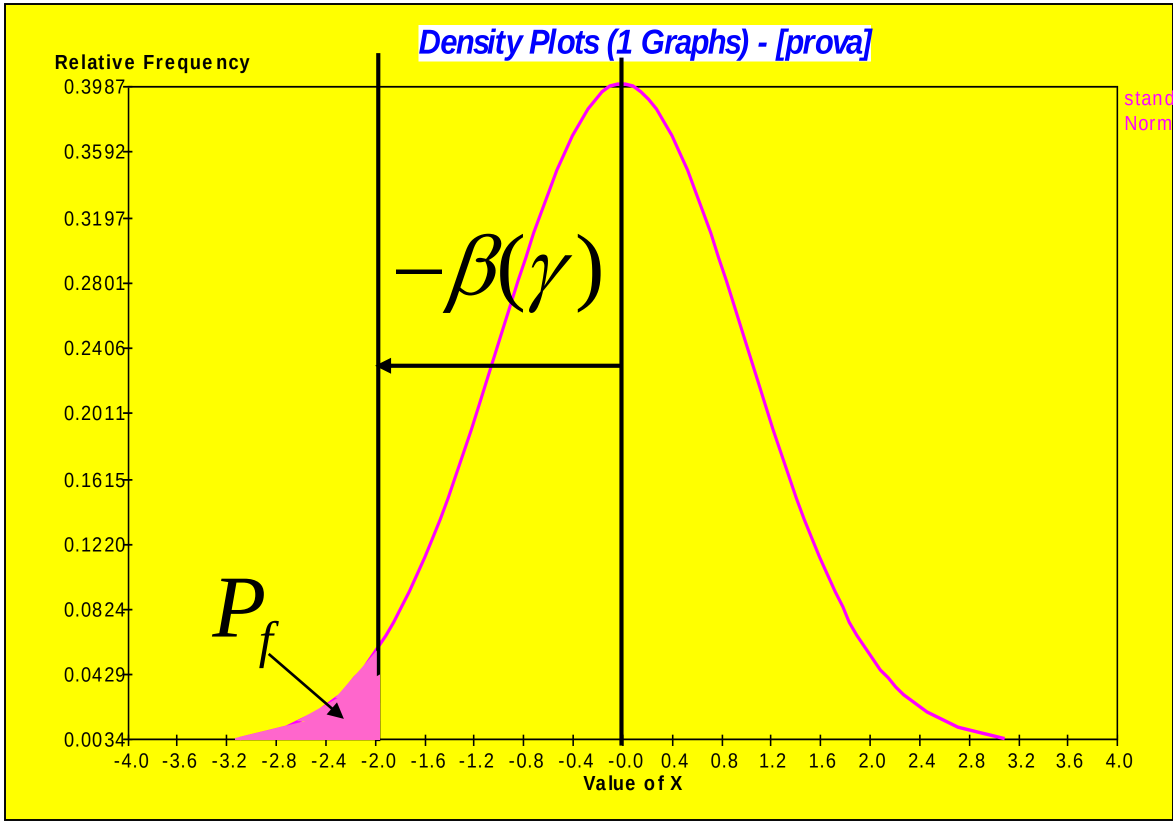
$$\gamma = \frac{\mu_R}{\mu_S}$$

- than:

$$\beta = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\delta_R^2 \cdot \gamma^2 + \delta_s^2}}$$

- where:

$$\delta_R = \frac{\mu_R}{\sigma_R} \qquad \delta_S = \frac{\mu_S}{\sigma_S}$$



Method of Partial coefficients

- Design loads are indicated with "S_d"

$$S_d = S_k \cdot \gamma_S$$

- Design strength are indicated with "R_d"

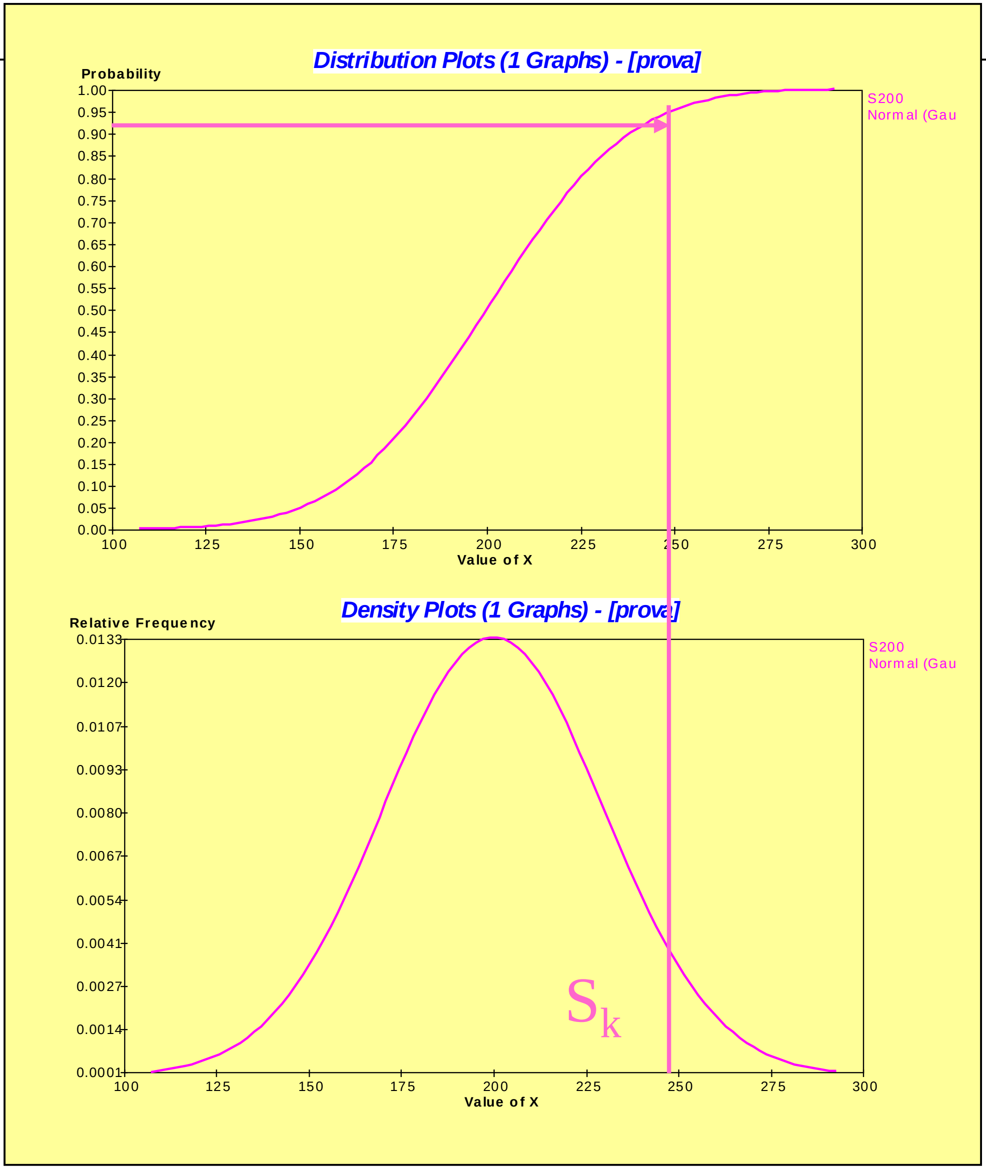
$$R_d = \frac{R_k}{\gamma_m}$$

We design By imposing the following condition (limit state equation)

$$S_d = R_d$$

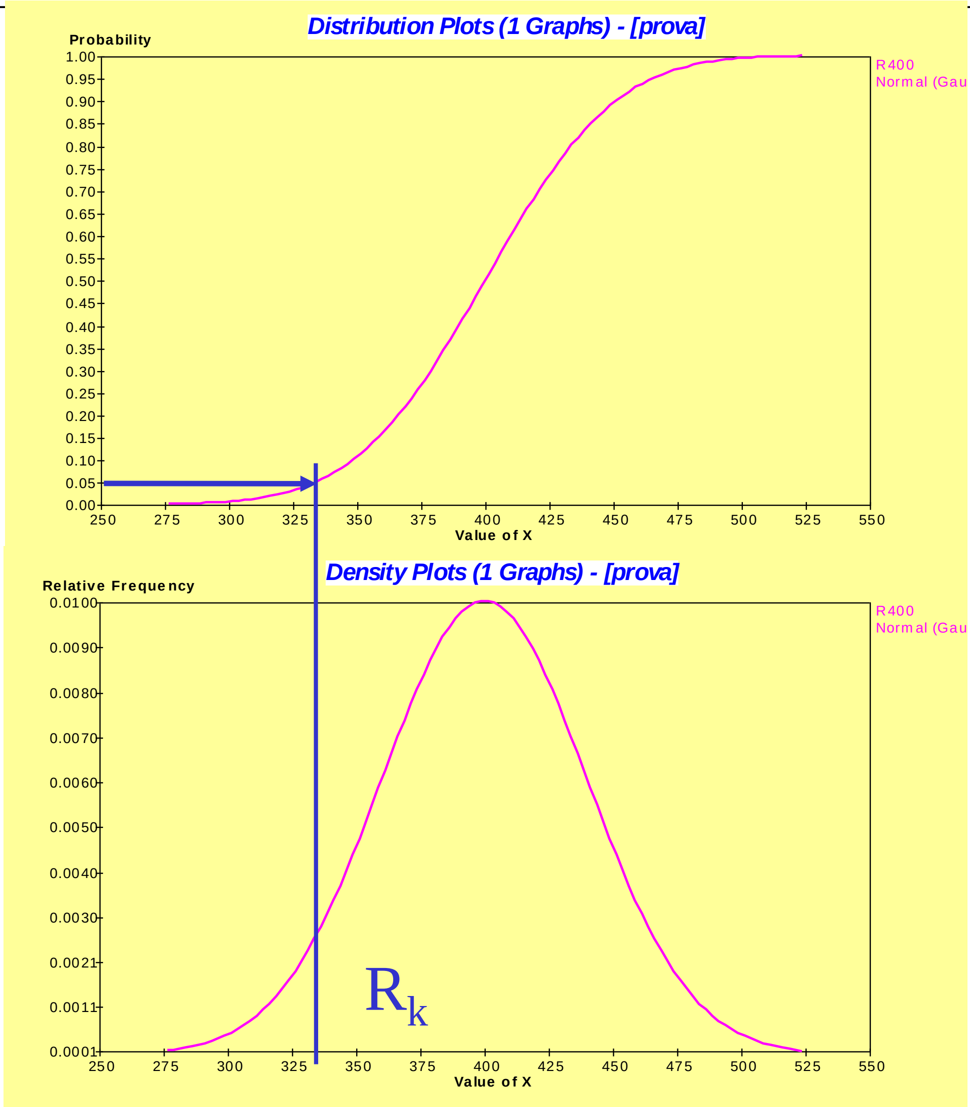
According to code we need to start from the characteristic values

- **For the loads S_k is the 95 % percentile**



La resistenza caratteristica a compressione è definita come la resistenza per la quale si ha il 5% di probabilità di trovare valori inferiori. Nelle presenti norme la resistenza caratteristica designa quella dedotta da prove su provini come sopra descritti, confezionati e stagionati come specificato al § 11.2.4, eseguite a 28 giorni di maturazione. Potranno essere indicati altri tempi di maturazione a cui riferire le misure di resistenza ed il corrispondente valore caratteristico. Inoltre, si dovrà tener conto degli effetti prodotti da eventuali processi accelerati di maturazione.

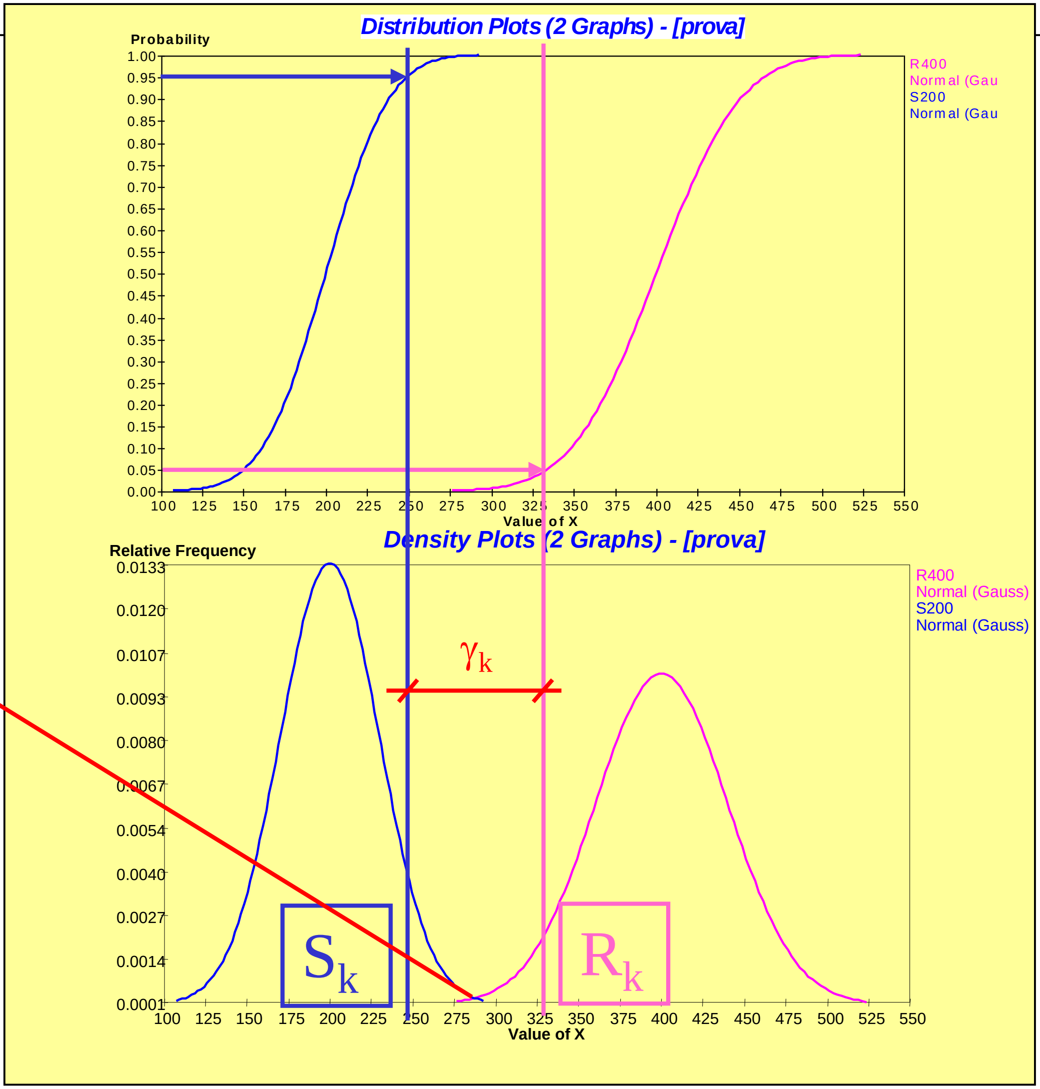
- **For the strength R_k is the 5 % percentile**



QUESTION: how larger should be R_k with respect to S_k to obtain a certain P_f ?

$$\gamma_k = \frac{Rk}{Sk}$$

- **P_f - ULS= 10^{-5}**



QUESTION: Given a certain P_f , how much I need to separate R_k from S_k?

- By imposing

$$S_D \leq R_D$$

$$S_D = \gamma_S \cdot S_k \qquad R_d = \frac{R_k}{\gamma_R}$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma_R \cdot \gamma_S \cdot S_k \leq R_k$$

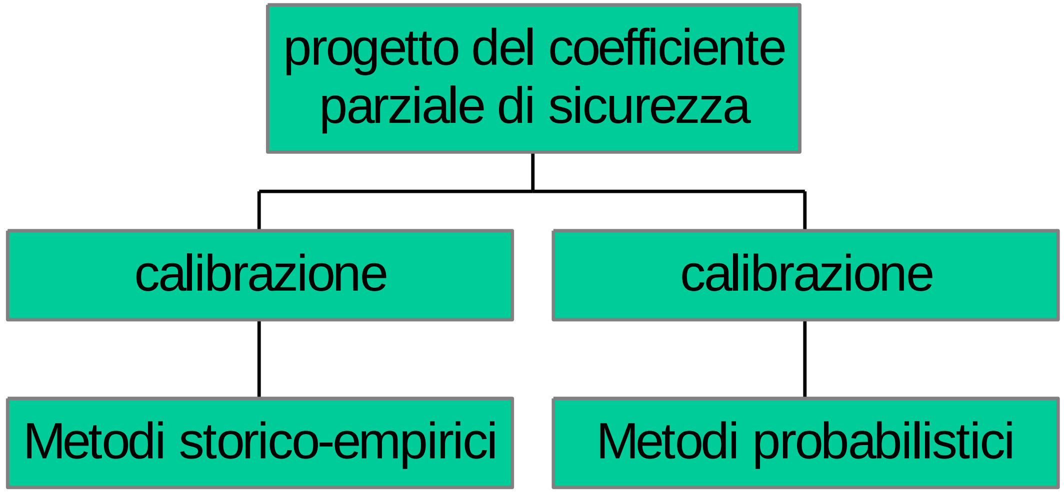
$$\Downarrow$$

$$\gamma_k \cdot S_k \leq R_k$$

- $\gamma_k = \gamma_R * \gamma_s$ = «characteristic factor»

Calibration of partial factor

- In linea di principio esistono due modi di determinare valori numerici per i coefficienti parziali
  - secondo una calibratura basata su di una storia lunga e di successo della tradizione dell'edificare
  - sulla base della valutazione statistica e di dati sperimentali ed insiemi di osservazioni. Cio' deve essere fatto seguendo la teoria probabilistica della sicurezza.
- i metodi sopra citati possono anche essere utilizzati in combinazione



Example of Calibration

- OBJECTIVE
  - WE WANT TO DETERMINE γ_R and γ_S such that:

$$\gamma_S \cdot S_k \leq \frac{R_k}{\gamma_R}$$

  - Thus leading to $\underline{P_f < 10^{-6}}$ (ULS)

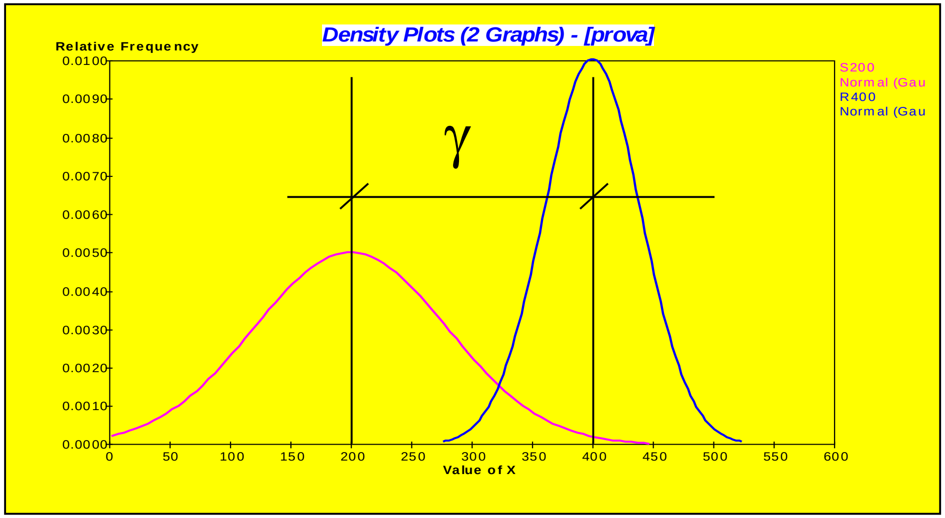
Starting from the mean values

- if γ = distance between μ_R and μ_S

$$\mu_R = \gamma \cdot \mu_S$$

- It follows:

$$\frac{\mu_R}{\sqrt{\gamma}} = \sqrt{\gamma} \cdot \mu_S$$



From the fundamental case:

- $P_f = 10^{-6}$ leads to $\beta = 4.75$
- and:

$$\beta = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\delta_R^2 \cdot \gamma^2 + \delta_s^2}}$$

- Imposing $\underline{P_f < 10^{-6}}$ (ULS):

$$\frac{\gamma - 1}{\sqrt{\delta_R^2 \cdot \gamma^2 + \delta_s^2}} \geq 4.75$$

Example: RC building

- Strengths and loads are normally distributed

- Loads:
  - Normal
  - Mean value μ_S
  - COV $\delta_S = \dfrac{\sigma_S}{\mu_S} = 0.28$

- Strengths:
  - Normal
  - Mean value μ_R
  - COV $\delta_R = \dfrac{\sigma_R}{\mu_R} = 0.15$

RC BUILDING: U.L.S.

- From the equation $$\beta = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\delta_R^2 \cdot \gamma^2 + \delta_s^2}} \geq 4.75$$
- substituting $\delta_S = 0.28 \quad \delta_R = 0.15$
- We get $\gamma \cong 4.4$
- thus $\mu_R \geq 4.4 \cdot \mu_S$

$$\mu_S = \frac{S_k}{(1+1.64\delta_S)1.46} = \frac{S_k}{1.46}$$

$$\gamma \cdot \mu_S \geq \mu_R$$

$$\mu_R = \frac{R_k}{(1-1.64\delta_R)} = \frac{R_k}{0.76}$$

$$\sqrt{\gamma} \cdot \mu_S \leq \frac{\mu_R}{\sqrt{\gamma}}$$

$$\gamma \cong 4.4 \quad \sqrt{\gamma} \cong 2.1$$

$$\sqrt{\gamma} \cdot \frac{S_K}{1.46} \leq \frac{R_K}{0.76 \cdot \sqrt{\gamma}}$$

$$1.45 \cdot S_K \leq \frac{R_K}{1.6} \quad \text{ULS}$$

4.1.2. VERIFICHE DEGLI STATI LIMITE

4.1.2.1 MATERIALI

4.1.2.1.1 Resistenze di progetto dei materiali

4.1.2.1.1.1 *Resistenza di progetto a compressione del calcestruzzo*

Per il calcestruzzo la resistenza di progetto a compressione, f_{cd}, è:

$$f_{cd} = \alpha_{cc} f_{ck} / \gamma_c \qquad [4.1.3]$$

dove:

α_{cc} è il coefficiente riduttivo per le resistenze di lunga durata;

γ_c è il coefficiente parziale di sicurezza relativo al calcestruzzo;

f_{ck} è la resistenza caratteristica cilindrica a compressione del calcestruzzo a 28 giorni.

Il coefficiente γ_c è pari ad 1,5.

Il coefficiente α_{cc} è pari a 0,85.

Nel caso di elementi piani (solette, pareti, …) gettati in opera con calcestruzzi ordinari e con spessori minori di 50 mm, la resistenza di progetto a compressione va ridotta a 0,80 f_{cd}.

Il coefficiente γ_c può essere ridotto da 1,5 a 1,4 per produzioni continuative di elementi o strutture, soggette a controllo continuativo del calcestruzzo dal quale risulti un coefficiente di variazione (rapporto tra scarto quadratico medio e valor medio) della resistenza non superiore al 10%. Le suddette produzioni devono essere inserite in un sistema di qualità di cui al § 11.8.3.

4.1.2.1.1.2 *Resistenza di progetto a trazione del calcestruzzo*

La resistenza di progetto a trazione, f_{ctd}, vale:

$$f_{ctd} = f_{ctk} / \gamma_c \qquad [4.1.4]$$

dove:

γ_c è il coefficiente parziale di sicurezza relativo al calcestruzzo già definito al § 4.1.2.1.1.1;

f_{ctk} è la resistenza caratteristica a trazione del calcestruzzo (§ 11.2.10.2).

Il coefficiente γ_c assume il valore 1,5.

Nel caso di elementi piani (solette, pareti, …) gettati in opera con calcestruzzi ordinari e con spessori minori di 50 mm, la resistenza di progetto a trazione va ridotta a 0,80f_{ctd}.

Il coefficiente γ_c può essere ridotto, da 1,5 a 1,4 nei casi specificati al § 4.1.2.1.1.1.

4.1.2.1.1.3 *Resistenza di progetto dell'acciaio*

La resistenza di progetto dell'acciaio f_{yd} è riferita alla tensione di snervamento ed il suo valore è dato da:

$$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s \qquad [4.1.5]$$

dove:

γ_s è il coefficiente parziale di sicurezza relativo all'acciaio;

f_{yk} per armatura ordinaria è la tensione caratteristica di snervamento dell'acciaio (§ 11.3.2), per armature da precompressione è la tensione convenzionale caratteristica di snervamento data, a seconda del tipo di prodotto, da f_{pyk} (barre), $f_{p(0,1)k}$ (fili), $f_{p(1)k}$ (trefoli e trecce); si veda in proposito la Tab. 11.3.VIII.

Il coefficiente γ_s assume sempre, per tutti i tipi di acciaio, il valore 1,15.

stenza di progetto a compressione va ridotta a 0,80 f_{cd}.

Il coefficiente γ_c può essere ridotto da 1,5 a 1,4 per produzioni continuative di elementi o strutture, soggette a controllo continuativo del calcestruzzo dal quale risulti un coefficiente di variazione (rapporto tra scarto quadratico medio e valor medio) della resistenza non superiore al 10%. Le suddette produzioni devono essere inserite in un sistema di qualità di cui al § 11.8.3.

RC BUILDING: S.L.S.

- For a $P_f = 1\ \% \Rightarrow \beta = 2.33$
- Solving the equation $$\beta = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\delta_R^2 \cdot \gamma^2 + \delta_s^2}} \geq 2.33$$
- substituting $\delta_S = 0.28 \quad \delta_R = 0.15$
- We get $\gamma \cong 1.9$
- thus $\mu_R \geq 1.9 \cdot \mu_S$

$$\mu_S = \frac{S_k}{1.46}$$

$$\gamma \cdot \mu_S \geq \mu_R$$

$$\mu_R = \frac{R_k}{0.76}$$

$$\sqrt{\gamma} \cdot \mu_S \leq \frac{\mu_R}{\sqrt{\gamma}}$$

$$\gamma \cong 1.9 \quad \sqrt{\gamma} \cong 1.38$$

$$\sqrt{\gamma} \cdot \frac{S_K}{1.46} \leq \frac{R_K}{0.76 \cdot \sqrt{\gamma}}$$

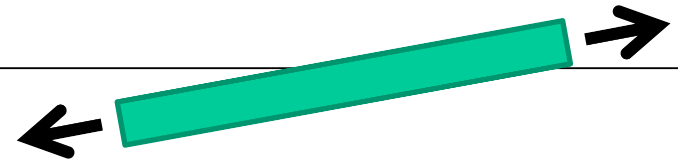
- S.L.S.

$$0.95 \cdot S_K \leq \frac{R_K}{1.05}$$

$$S_K \leq R_K$$

The fundamental case 2

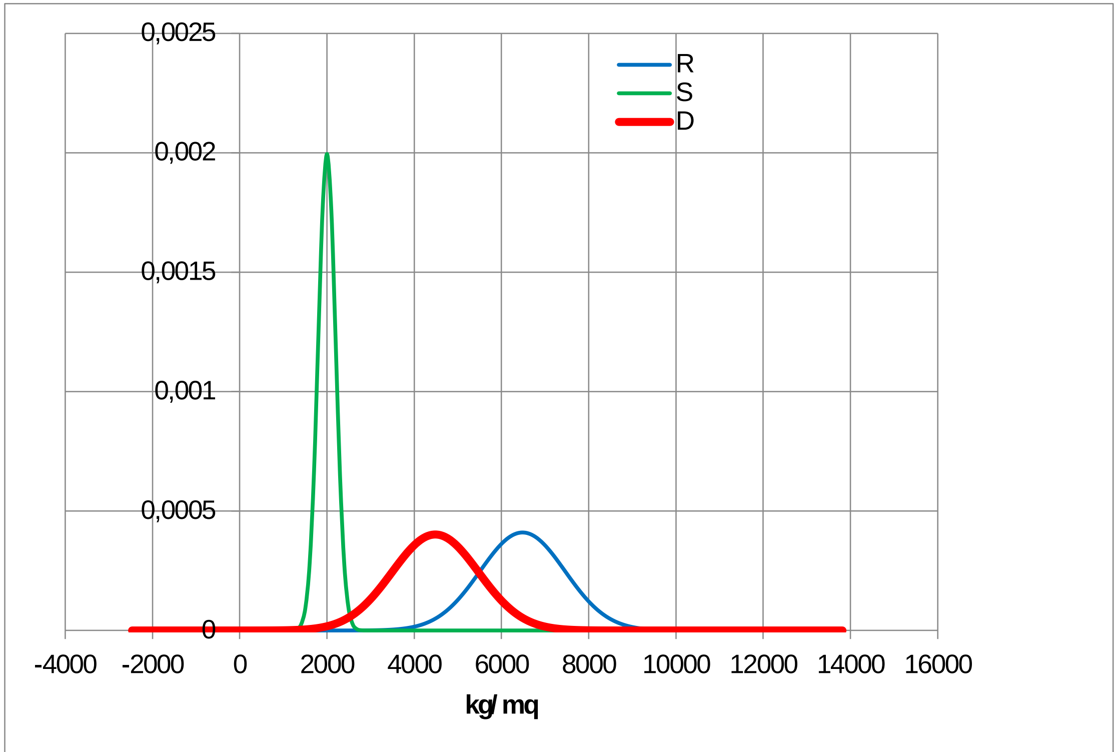
Example 1: heavy concrete slab



Data:

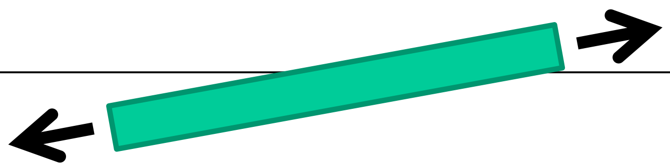
γ_m =1.5 γ_s =1.4

δ_m =0.1 δ_s =0.1



Pf= 10^{-10}

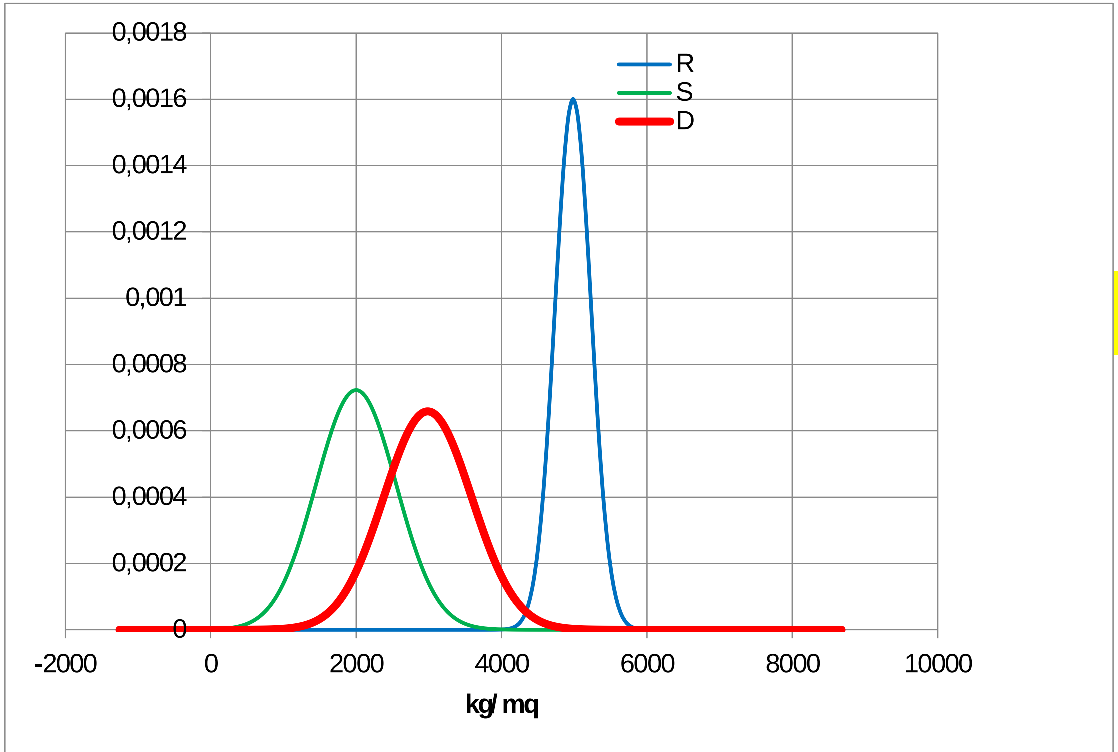
Example 2: light steel roof



Data:

γ_m =1.05 γ_s =1.5

δ_m =0.05 δ_s =0.28



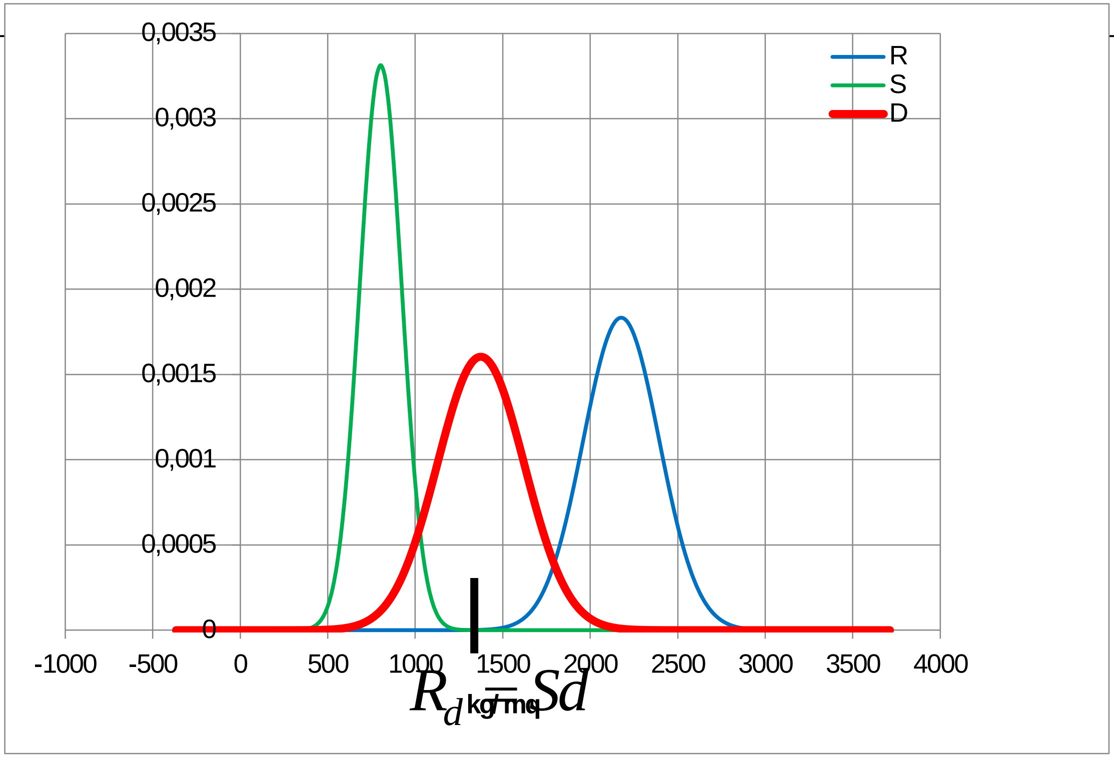
Pf=5 10^{-7}

Design loads and design strength

R=strength $R \sim N(\mu_R, \sigma_R)$

S=load $S \sim N(\mu_S, \sigma_S)$

D=R-S



DESIGN VALUES

$$R_d = \frac{\mu_R(1-1.64\delta_R)}{\gamma_R}$$

$$S_d = \gamma_S \mu_S (1+1.64\delta_S)$$

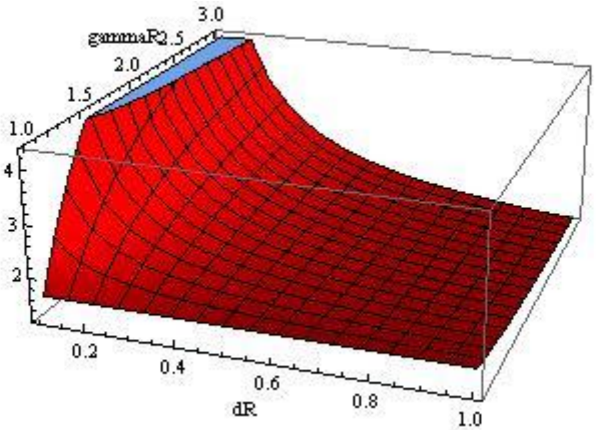
It can be shown that:

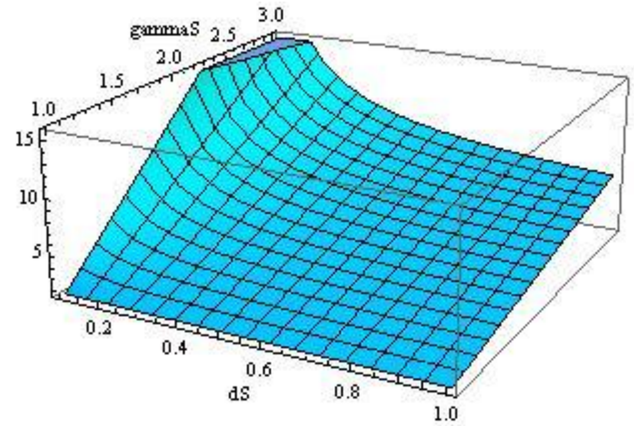
$$P(R<R_d) = \Phi\left(\frac{1-1.64\delta_R - \gamma_R}{\gamma_R \delta_R}\right) = \Phi(\beta_R)$$

$$P(S>S_d) = 1-\Phi\left(\frac{(1+1.64\delta_S)\gamma_S - 1}{\delta_S}\right) = \Phi(-\beta_S)$$

$\Phi(\beta_R)$ and $\Phi(\beta_S)$

Beta vs gamma e Cov



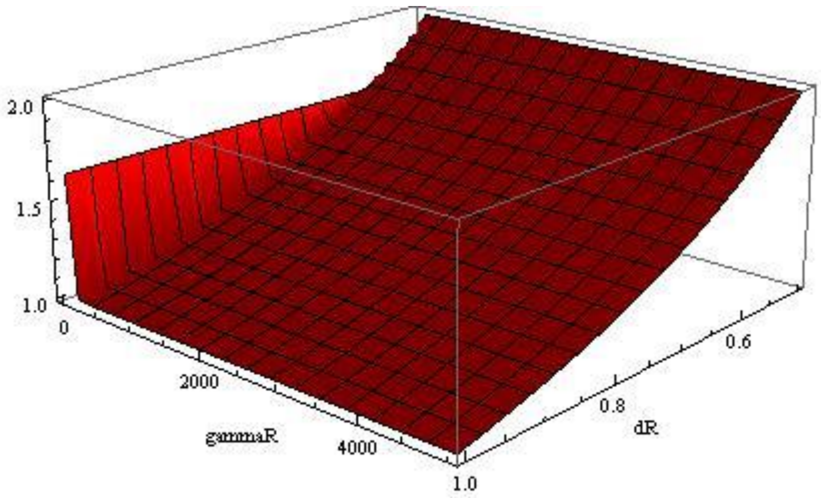


- Osservazioni:
  - Per cov uguali e stessi gamma (tra 1 e 3) per carichi e resistenze si ottengono beta MOLTO diversi!!!
  - In particolare per cov>0.5 il beta dei carichi risulta praticamente costante per gamma compresi tra 1 e 3

L'effetto dei gamma sulle resistenze e sui carichi e resistenze è completamente diverso

$$\Phi\left(\beta_R\right)$$

Beta R per Cov>0.5



- Dall'espressione matematica di $\Phi\left(\beta_R\right)$
  - Per gamma=1 la funzione vale 1.64 (ok)
  - Per gamma grandi

$$\Phi\left(\beta_R\right) \longrightarrow \frac{1}{\delta_R}$$

Ad esempio con COV(R)=0.5 il beta R si plafona a 2!!!!!

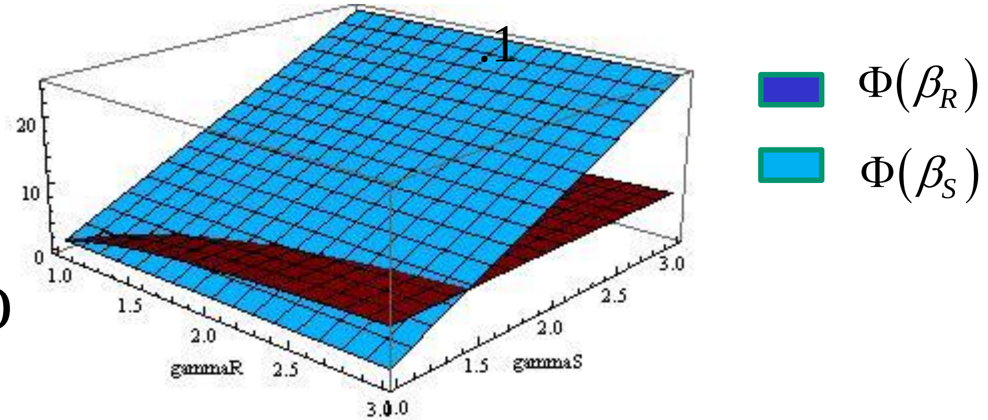
L'effetto dei gamma sulle resistenze e sui carichi e resistenze è completamente diverso

$\Phi(\beta_R)$ and $\Phi(\beta_S)$

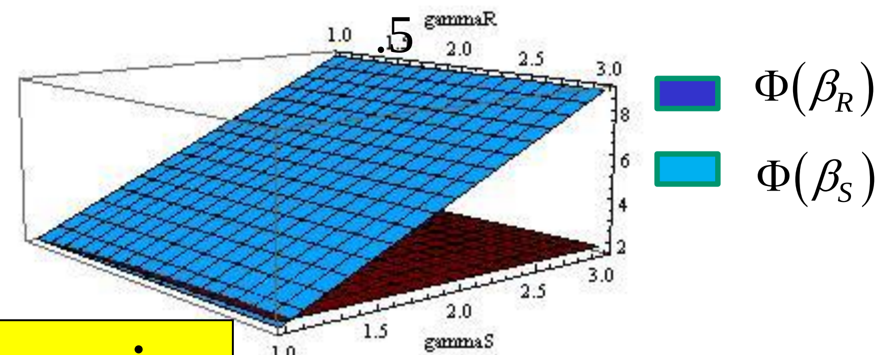
Beta vs gamma per fissati Cov

- Osservazioni:
  - Per cov uguali e stessi gamma (tra 1 e 3) per carichi e resistenze si ottengono beta MOLTO diversi!!!
  - In particolare per cov=0.5 il beta dei carichi risulta praticamente costante per gamma compresi tra 1 e 3

dR=dS=0.1



dR=dS=0.5



L'effetto dei gamma sulle resistenze e sui carichi e resistenze è completamente diverso

$$\Phi\left(\beta_D\right)$$

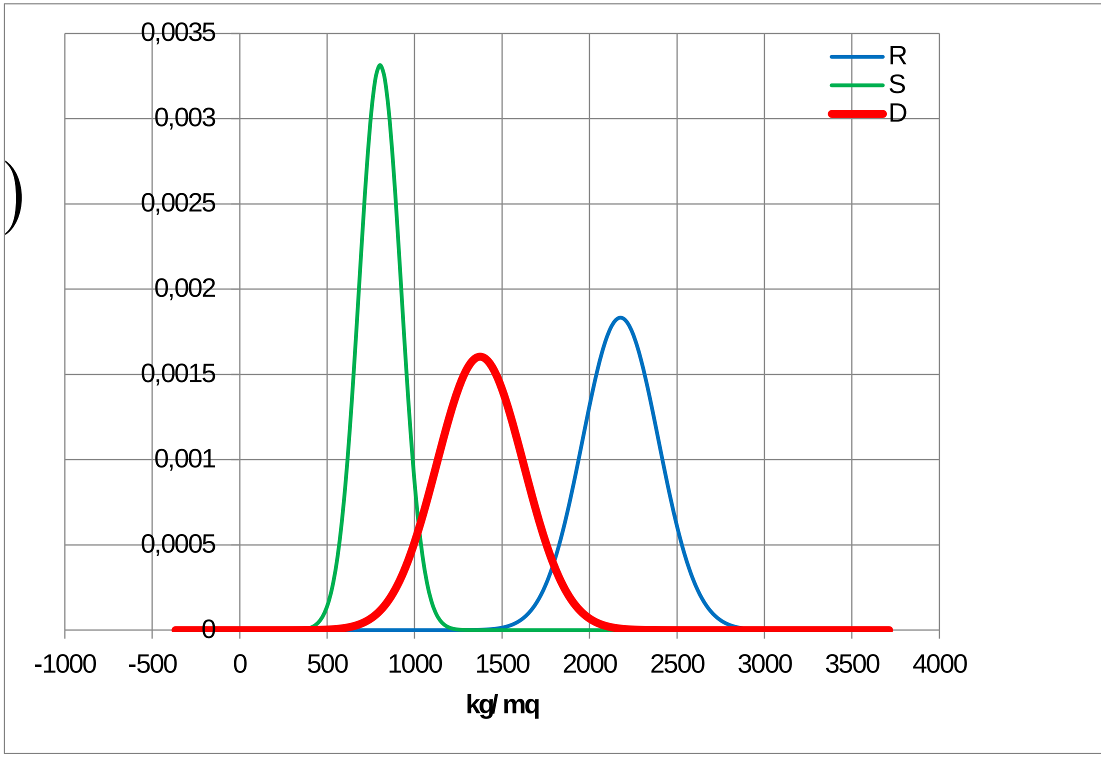
- By defintion

$$P_f = \mathrm{P}(\mathrm{D}<0) = \Phi\left(-\frac{\mu_D}{\sigma_D}\right) = \Phi\left(\beta_D\right)$$

It can be swhon that:

$$\beta_D = \frac{\gamma_R \gamma_R \alpha - 1}{\sqrt{\left(\gamma_R \gamma_R \alpha \delta_R\right)^2 + {\delta_S}^2}}$$

$$\beta_D = \frac{\left(1 - \dfrac{1+\beta_R \delta_R}{1+\beta_S \delta_S}\right)}{\sqrt{{\delta_R}^2 + \left(\dfrac{1+\beta_R \delta_R}{1+\beta_S \delta_S}\right)^2 {\delta_S}^2}}$$

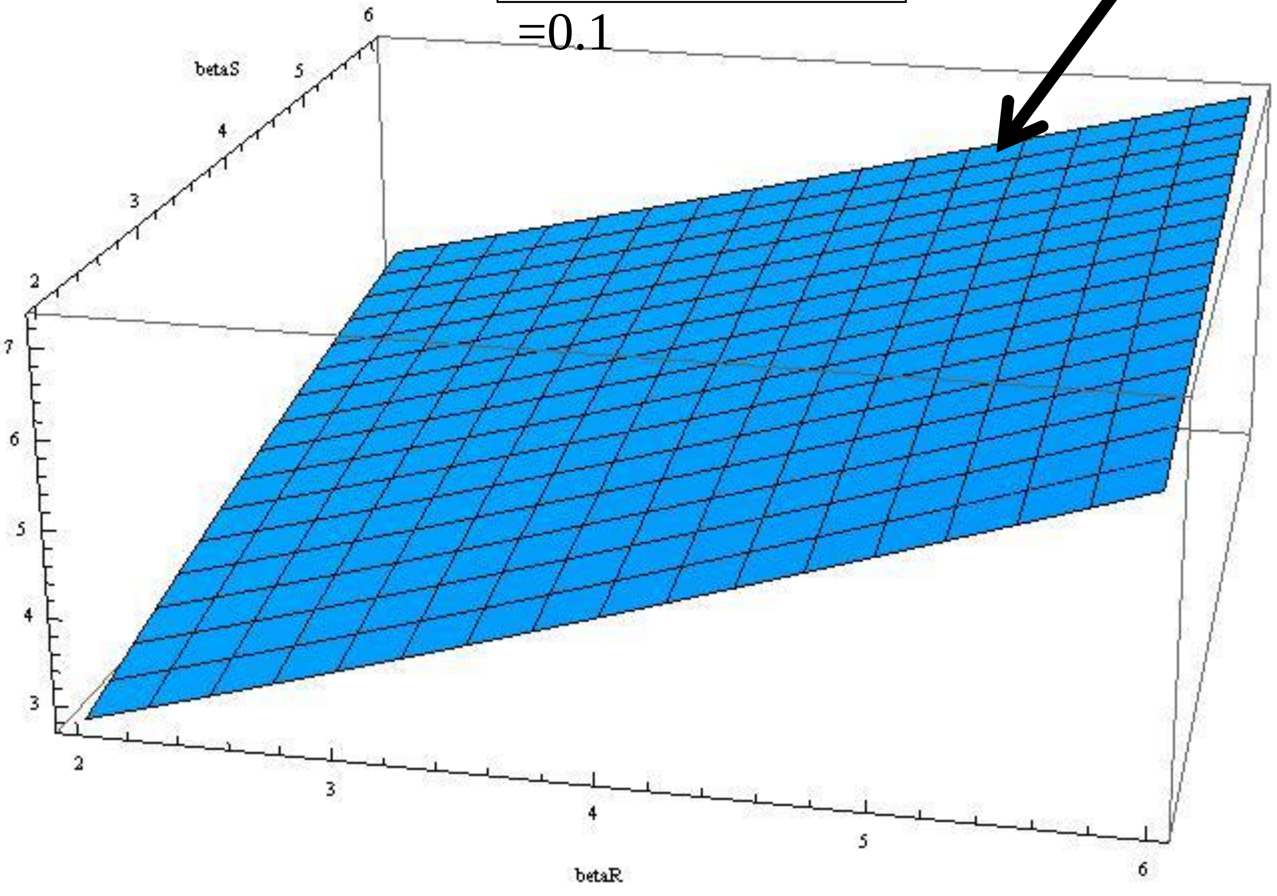


Probabilità di collasso in funzione delle probabilità di superamento dei carichi e non superamento delle

$$\Phi\left(\beta_D\right)$$

$$\beta_D = \frac{\left(1 - \frac{1+\beta_R\delta_R}{1+\beta_S\delta_S}\right)}{\sqrt{\delta_R^{\ 2} + \left(\frac{1+\beta_R\delta_R}{1+\beta_S\delta_S}\right)^2 \delta_S^{\ 2}}}$$

Cov(R)=Cov(S) =0.1

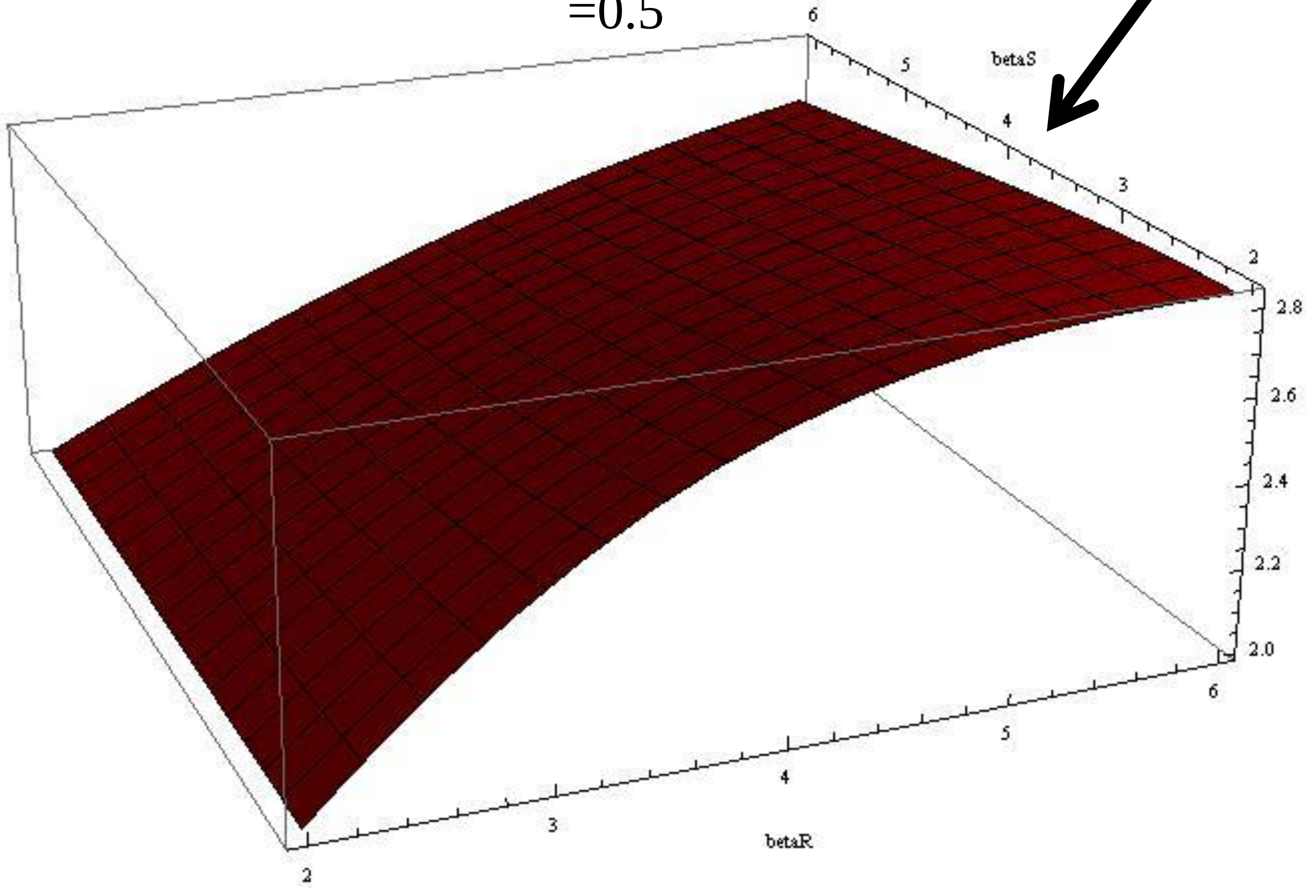


CON COV PICCOLI PER CARICHI E RESISTENZE IL BETA D CRESCE SIA CON BETA S CHE CON BETA R!!!!

$$\Phi\left(\beta_D\right)$$

$$\beta_D = \frac{\left(1 - \frac{1+\beta_R\delta_R}{1+\beta_S\delta_S}\right)}{\sqrt{\delta_R^{\ 2} + \left(\frac{1+\beta_R\delta_R}{1+\beta_S\delta_S}\right)^2 \delta_S^{\ 2}}}$$

Cov(R)=Cov(S)
=0.5

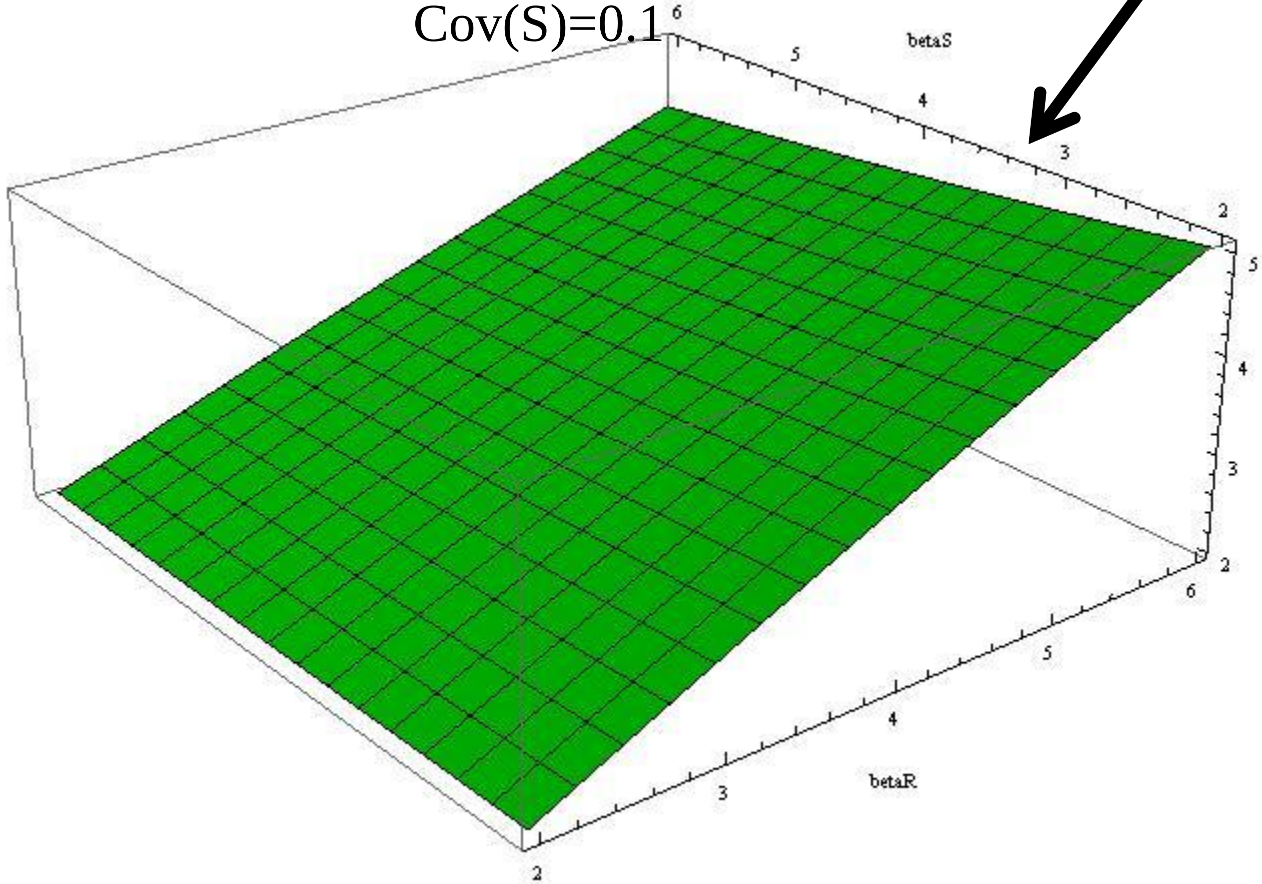


CON COV ELEVATI ANCHE CON BETA=6 PER CARICHI E RESISTENZE IL BETA D RIMANE

$$\Phi\left(\beta_D\right)$$

$$\beta_D = \frac{\left(1-\frac{1+\beta_R\delta_R}{1+\beta_S\delta_S}\right)}{\sqrt{\delta_R{}^2+\left(\frac{1+\beta_R\delta_R}{1+\beta_S\delta_S}\right)^2\delta_S{}^2}}$$

Cov(R)=0.5 &
Cov(S)=0.1

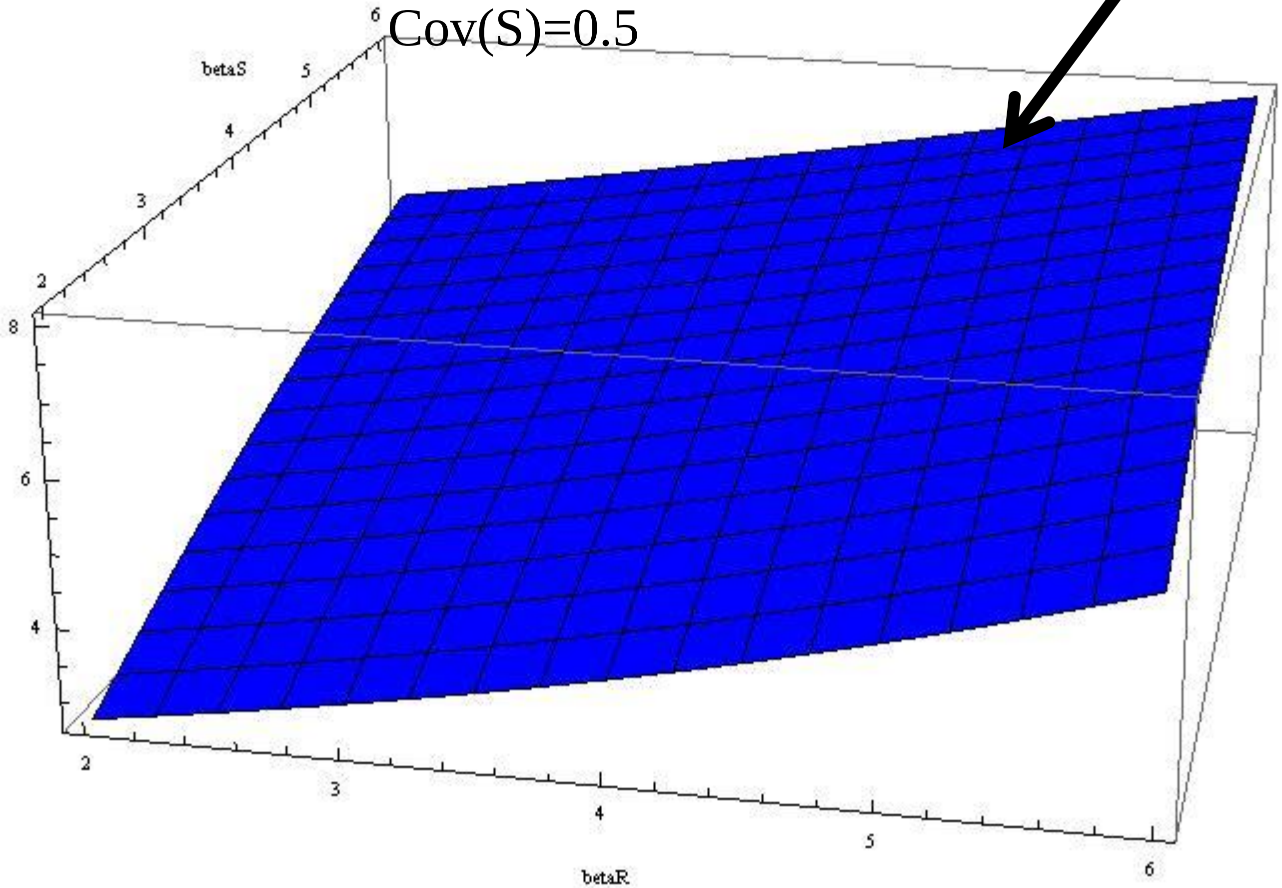


CON COV(R) ELEVATI ANCHE CON BETA=6 PER CARICHI E RESISTENZE IL BETA D RIMANE

$$\Phi\left(\beta_D\right)$$

$$\beta_D = \frac{\left(1 - \frac{1+\beta_R\delta_R}{1+\beta_S\delta_S}\right)}{\sqrt{\delta_R^{\,2} + \left(\frac{1+\beta_R\delta_R}{1+\beta_S\delta_S}\right)^2 \delta_S^{\,2}}}$$

Cov(R)=0.1 &
Cov(S)=0.5

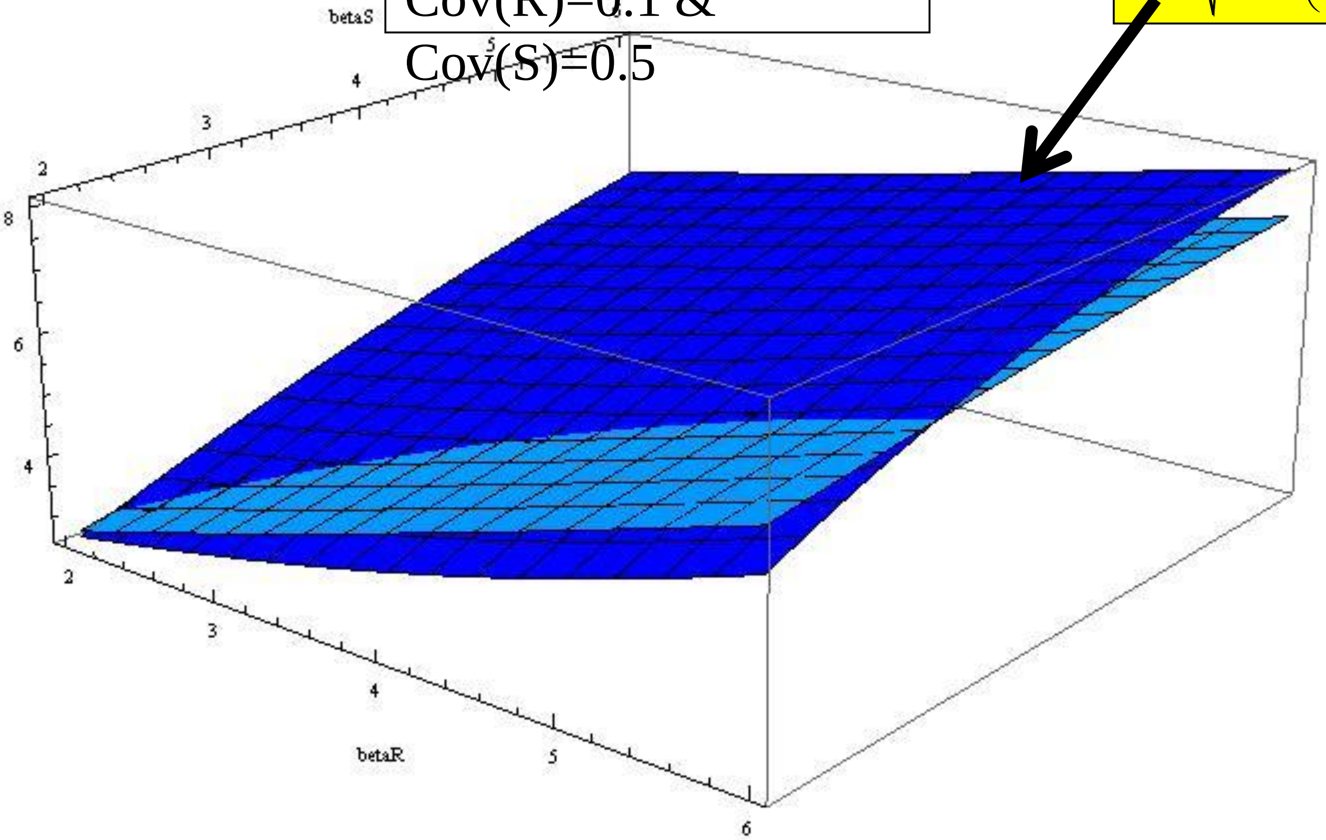


CON COV(S) ELEVATI E COV (R) PICCOLI andamento è simile al caso con entrambi cov piccoli

$$\Phi\left(\beta_D\right)$$

$$\beta_D = \frac{\left(1 - \frac{1+\beta_R\delta_R}{1+\beta_S\delta_S}\right)}{\sqrt{\delta_R{}^2 + \left(\frac{1+\beta_R\delta_R}{1+\beta_S\delta_S}\right)^2 \delta_S{}^2}}$$

Cov(R)=0.1 &
Cov(S)=0.5



CON COV(S) ELEVATI E COV (R) PICCOLI (curva blue) andamento è simile al caso con entrambi cov

$\Phi\left(\beta_D\right)$

$$\beta_D = \frac{\left(1 - \frac{1+\beta_R\delta_R}{1+\beta_S\delta_S}\right)}{\sqrt{\delta_R{}^2 + \left(\frac{1+\beta_R\delta_R}{1+\beta_S\delta_S}\right)^2 \delta_S{}^2}}$$

Plot per diverse combinazioni di Cov

- dR=dS=0.5
- dR=0.5; dS=0.1
- dR=dS=0.1
- dR=0.1;dS=0.5